Catalogue no. 13-604-MIE — No. 42
ISSN: 1707-1739
ISBN: 0-662-35296-3

Research Paper

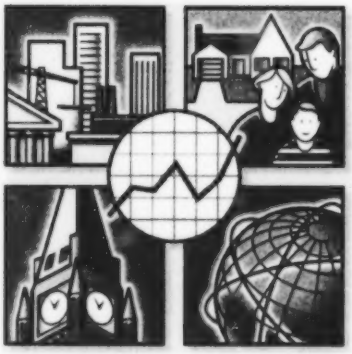
Income and Expenditure Accounts technical series

Chain Fisher Volume Index Methodology

by Michel Chevalier

Income and Expenditure Accounts Division
21st Floor, R.H. Coats Building, Ottawa, K1A 0T6

Telephone: 1 613 951-3640



This paper represents the views of the author and does not necessarily reflect the opinions of Statistics Canada.

Statistics Canada Statistique Canada

Canada

Chain Fisher Volume Index Methodology

On May 31, 2001 the quarterly income and expenditure accounts adopted the Fisher index formula, chained quarterly, as the official measure of real gross domestic product in terms of expenditures. This formula was also adopted for the Provincial Accounts on October 31, 2002.

There were two reasons for adopting this formula: to provide users with a more accurate measure of real GDP growth between two consecutive periods and to make the Canadian measure comparable with the Income and Product Accounts of the United States, which has used the chain Fisher index formula since 1996 to measure real GDP.

Ottawa
November 2003

Catalogue no. 13-604-**MIE** no. 42
ISBN: 0-662-35296-3
ISSN: 1707-1739

Catalogue no. 13-604-**MPE** no. 42
ISBN: 0-662-35295-5
ISSN: 1707-1720

Published by authority of the Minister responsible for Statistics Canada

© Minister of Industry, 2003

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission from Licence Services, Marketing Division, Statistics Canada, Ottawa, Ontario, Canada K1A 0T6.

The paper used in this publication meets the minimum requirements of American National Standard for Information Sciences - Permanence of Paper for Printed Library Materials, ANSI Z39.48 - 1984.

Table of contents

1.0 Introduction 1

2.0 Building an index and chaining 1
Example 1 : A wine and cheese economy 2
Example 2 : Wine and cheese production without the price effect 3
Example 3 : Another way to remove the price effect 4

3.0 Choice of index 5

4.0 Application in the Income and Expenditure Accounts 6
Example 4 : In the real world : the deflation method 7

4.1 Annual and quarterly National Economic and Financial Accounts 9
Level of detail at the national level 9

4.2 The problem of inventory 9

4.3 The provincial accounts 10
Level of detail at the provincial level 10
Sources of bias between the national and the provincial systems 11

5.0 The problem of non-additivity 11
Contribution to a GDP change series 12

Appendix I: Transformation of Laspeyres and Paasche indexes 13

Appendix II: Contribution to change formula 14

Bibliography 17

Technical series 19

ELECTRONIC PUBLICATIONS AVAILABLE AT
www.statcan.ca

106-03339/

Chain Fisher Volume Index Methodology

by Michel Chevalier

1.0 Introduction

Growth in the current gross domestic product (GDP) or any other nominal value aggregate can be decomposed into two elements: a "price effect", or the part of the growth linked to inflation, and a "volume effect", which covers the change in quantities, quality and composition of the aggregate. The volume effect is presented in the National Accounts by what is referred to as the "real" series (such as the real GDP).

In the Canadian National Accounts, the volume effect is determined using the deflation method, which eliminates the price effect from each component of the aggregate and then aggregates the components thus deflated to obtain the "total" volume effect.

There are several ways to aggregate the components of an aggregate in order to calculate the volume effect. Index number theory offers a wide range of tools to this end. Since spring 2001, Statistics Canada has preferred the chain Fisher index. This measure is theoretically superior to the former fixed-base Laspeyres measure and also makes the Canadian data comparable with the United States' official measures of economic activity. Furthermore, it offers compliance with the recommendations of the System of National Accounts 1993 (SNA).[1]

The following paragraphs provide a simplified explanation of the methods that will henceforth be used by the National Accounts to measure the country's real economic activity.

2.0 Building an index and chaining

A given nominal aggregate (GDP or other) represents a summation of quantities evaluated in the same monetary unit, at the prices of the current period. To use GDP as an example, this summation can be expressed as GDP = Σpq , which is the sum of all quantities of goods and services transacted in the economy, multiplied by their respective prices. The change or variation in nominal GDP, between a period *o* and a period *t*, can therefore be expressed in index[2] form by:

(1) $$\Delta GDP_{t/o} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_o q_o}$$

where: $\Delta GDP_{t/o}$ is the GDP variation index
p_t is the price at time *t*
p_0 is the price at time *o*
q_t is the quantity at time *t*
q_o is the quantity at time *o*

[1] *System of National Accounts 1993. Prepared under the auspices of the Inter-Secretariat Working Group on National Accounts: Commission of the European Communities – Eurostat; International Monetary Fund; Organisation for Economic Co-operation and Development; United Nations; World Bank. Brussels/Luxembourg, New York, Paris, Washington, D.C., 1993.*

[2] *That is, by establishing a ratio between the size of the current period and the size of a preceding period.*

A calculation of a GDP value index is shown in *Example 1: A wine and cheese economy.*

The change obtained by this formula may theoretically be divided into a change in prices and a change in volume. If there were an "average" GDP price then it would be quite simple to divide the change in GDP (given by Equation (1)) by this average price to obtain the average change in quantities. Most of the time in the National Accounts, there is no such average price. Thus, the total change in quantities can only be calculated by adding the changes in quantities in the economy. However, creating such a summation is problematic in that it is not possible to add quantities with physically different units, such as cars and telephones, even two different models of cars. This means that the quantities have to be re-evaluated using a common unit. In a currency-based economy, the simplest solution is to express quantities in monetary terms: once evaluated, that is, multiplied by their prices, quantities can be easily aggregated.

Example 1: A wine and cheese economy...

In an insular economy where there would be only wine and cheese, we find the following portrait of production for the last four quarters :

		Q1	Q2	Q3	Q4
Cheese (kilos)	*q*	100	105	108	112
	p	15	16	18	20
	v	1,500	1,680	1,944	2,240
Wine (liters)	*q*	25	30	38	50
	p	22	20	16	12
	v	550	600	608	600
Total GDP	*v*	2,050	2,280	2,552	2,840

In this economy, the quantity of cheese produced rises regularly, as well as its price. However, the quantity of wine produced raises very quickly as its price drops significantly.

What would the growth of the nominal GDP be between, say, Q1 and Q3? The calculation of the index defined by the equation (1) gives the answer:

$$\Delta GDP_{Q3/Q1} = \frac{\sum p_{Q3} q_{Q3}}{\sum p_{Q1} q_{Q1}} = \frac{(108 \times 18) + (38 \times 16)}{(100 \times 15) + (25 \times 22)} = \frac{2{,}552}{2{,}050} = 1.245$$

The growth of the economy, in nominal terms, will therefore be 24.5% between Q1 and Q3 (we get the percentage growth by subtracting 1 from the ratio given by the index and by multiplying the result by 100).

This calculation can be done for all the periods relative to Q1. At the end, we obtain an index that covers the four periods :

		Q1	Q2	Q3	Q4
ΔGDP	*i*	1.000	1.090	1.245	1.385

What would the growth be between periods Q3 and Q4? Here, the ratio of the indexes in Q3 and Q4 gives the answer :

$$\Delta GDP_{Q4/Q3} = \frac{1.385}{1.245} = 1.112$$

The growth will therefore be 11.2% between periods Q3 and Q4.

An intuitive way to measure changes in quantity over time is to take the prices available for a given period and to multiply the quantities from the subsequent periods by these same prices. It amounts to re-evaluating current quantities at prices fixed in time, which essentially "removes" the price effect. In mathematical terms, this can be expressed by the formula for the fixed-base Laspeyres index:

(2) $$LQ_{t/o} = \frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o}$$

where: $LQ_{t/o}$ is the Laspeyres quantity index
p_0 is the price at time *o*
q_t is the quantity at time *t*
q_o is the quantity at *o*

The only difference from Equation (1) is found in the numerator, where the quantities at time *t* are multiplied this time by the prices at time *o*. An application of this formula is shown in *Example 2: Wine and cheese production without the price effect.*

It is quite clear with such a formula that the results are highly dependent on the structure of prices at time *o*. Should this structure change with time, for example as a result of a drop in the price of one component compared with the others, then the index from Equation (2) will eventually be biased by the fact that it is dependent on an outdated price structure.

One way to overcome this type of problem is to periodically update the weighting base to bring it in line with the current period. This technique was used in the past by the System of National Accounts (SNA) when the real series was rebased every five or six years to reflect changes in the price structure.

Example 2 : Wine and cheese production without the price effect...

Still using our wine and cheese economy, this time we want to evaluate the increase in GDP between period Q1 and periods Q2, Q3 and Q4, excluding the price effect. In our table of the economy, we will use the prices in Q1 as « fixed prices » :

		Q1	Q2	Q3	Q4
Cheese (kilograms)	*q*	100	105	108	112
	p	15	16	18	20
		1,500	1,680	1,944	2,240
Wine (liters)	*q*	25	30	38	50
	p	22	20	16	12
		550	600	608	600
Total GDP		2,050	2,280	2,552	2,840

Applying equation (2), we obtain, for the growth between Q1 and Q3 :

$$LQ_{Q3/Q1} = \frac{\sum p_{Q1} q_{Q3}}{\sum p_{Q1} q_{Q1}} = \frac{(108 \times 15) + (38 \times 22)}{(100 \times 15) + (25 \times 22)} = \frac{2{,}456}{2{,}050} = 1.198$$

The growth in real GDP is 19.8% between Q1 and Q3. The same index can be calculated for all of the periods, still using Q1 as a base :

		Q1	Q2	Q3	Q4
$LQ_{t/Q1}$	*i*	1.000	1.090	1.198	1.356

This time, the growth between periods Q3 and Q4, excluding the price effect, is 13.2% :

$$\Delta LQ_{Q4/Q3} = \frac{1.356}{1.198} = 1.132$$

It is noteworthy that this growth of real GDP between Q3 and Q4 is greater than the growth in nominal GDP, which is 11.2%. According to this fixed-base Laspeyres index, the implicit price of the GDP, i.e. the nominal GDP divided by the real GDP (we also call it the *general level of prices*), has therefore dropped between Q3 and Q4.

It is possible, however, for the price structure to change more quickly that usual. The weighting base then becomes outdated quickly, perhaps making it necessary to increase the frequency of the rebasing. Ultimately, the weighting base can be systematically moved from period to period so that it is defined as being the period preceding the current period:

(3) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$$

where we find, in place of p_o from Equation (2), p_{t-1}. For the current period *t*, this "mobile-base" index gives the growth in volume weighted according to prices *t-1*. To some extent it incorporates the frequency of the rebasing, thereby eliminating the arbitrariness of a rebasing done only on an "as required" basis.

Example 3: Another way to remove the price effect

In the previous example, the growth in GDP between Q3 and Q4 was evaluated using Q1 prices. However, with time a change in the price structure of our isolated economy is becoming evident : the liter of wine, more expensive than the kilogram of cheese in Q1, becomes less expensive by Q3. Thus, this time, we will measure the growth between Q3 and Q4 using Q3 prices as the base.

		Q1	Q2	Q3	Q4
Cheese (kilograms)	*q*	100	105	108	112
	p	15	16	18	20
		1,500	1,680	1,944	2,240
Wine (liters)	*q*	25	30	38	50
	p	22	20	16	12
		550	600	608	600
Total GDP		2,050	2,280	2,552	2,840

Applying equation (3) gives us :

$$LQ_{Q4/Q3} = \frac{\sum p_{Q3} q_{Q4}}{\sum p_{Q3} q_{Q3}} = \frac{(112 \times 18) + (50 \times 16)}{(108 \times 18) + (38 \times 16)} = \frac{2{,}816}{2{,}552} = 1.103$$

The growth in real GDP is now evaluated at 10.3% between Q3 and Q4, rather than 13.1% with the fixed-based Laspeyres index. What happened? The change in quantities in the previous box were evaluated using a different price structure : the change in production from 38 to 50 liters of wine was evaluated at 22$/litre, while now this increase in production is evaluated at 16$/litre. The increase in « quantity » thus carries less weight in the balance when the aggregation is done.

What would be the growth between Q1 and Q3? Since equation (3) measures only the relationship between the current and the previous period, we cannot deduct this directly from this equation. However, we can multiply the successive growth of each period between Q1 and Q3. For example, if the growth is 2.3% between Q1 and Q2 and 4.3% between Q2 and Q3, the growth between Q1 and Q3 will be 1.023 X 1.043 = 1.067, so 6.7%. This calculation, the same as that of compound interest, illustrates the principle of chaining. Applied to our economy, equations (3) and (4) give us :

		Q1	Q2	Q3	Q4
Unchained Laspeyres index		1.000	1.090	1.091	1.103
Chained Laspeyres index		1.000	1.090	1.190	1.313

The growth between Q1 and Q3 will therefore be 19.0% :

$$\Delta LQ_{Q3/Q1} = \frac{1.190}{1.000} = 1.190$$

In the short term, this type of index can be adapted to cover several periods. Equation (3) can be chained by successive multiplications, that is, in each period, it can be multiplied by the results obtained from the preceding period. The prices used for weighting in the resulting chain are very recent prices and never become obsolete. Using our example, a chain index would have the following form:

$$(4) \qquad LQ_C = \frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_1 q_2}{\sum p_1 q_1} \times \ldots \times \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \times \ldots \times \frac{\sum p_{n-1} q_n}{\sum p_{n-1} q_{n-1}}$$

where *n* is the number of periods over which the chain index extends. *Example 3 : Another way to remove the price effect* shows how such a formula can be used.

The *System of National Accounts, 1993* recommends using chain indexes. Statistics Canada has been following this recommendation since the spring of 2001 for quarterly National Accounts and since the fall of 2002 for the Provincial Economic Accounts. Systematic chaining allows for constant renewal of the weighting base, thus avoiding the problem of outdated data associated with a fixed-base index.

3.0 Choice of index

The previous examples refer to a Laspeyres-type index. However, index number theory provides numerous other indices that differ in the way the components are weighted. For example, although the quantities in the Laspeyres index are weighted with the prices of a previous period, in the Paasche index they are weighted with the prices of the current period:

$$(5) \qquad PQ_{t/o} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}$$

where $PQ_{t/o}$ is the Paasche quantity index.

This index is in fact the reciprocal of the Laspeyres index. Used in its fixed-base form, it presents the same problem as that described earlier, but the inverse: it does not adequately reflect changes in the structure of the economy for previous periods. However, the Paasche index can be chained in the same way as the Laspeyres index (as in Equation (4)).

It can be shown that, in general, a Laspeyres quantity index will generate a larger increase over time than a Paasche quantity index. This occurs when prices and quantities are negatively correlated, that is, when goods or services that had become relatively more expensive are replaced by goods and services that have become relatively less expensive. This common substitution effect says to economic theory that the Laspeyres and Paasche indexes set upper and lower limits for a theoretically ideal, less biased, index.

This theoretical index can be approached by a Fisher-type index, representing the geometric mean of a Laspeyres and Paasche index:

$$(6) \qquad FQ_{t/o} = \sqrt{LQ_{t/o} \times PQ_{t/o}} = \sqrt{\frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}}$$

where $FQ_{t/o}$ is the Fisher quantity index.

This index is not only superior theoretically, but it also includes a number of desirable properties from the standpoint of the National Accounts. For example, it is "reversible over time", that is, the index showing the change between period *o* and period *t* is the reciprocal of the index showing the change between period *t* and period *o*. Another interesting feature is the "reversibility of factors" by which the product of the price and quantity indexes is equal to the index of the change in current values:

$$FP_{t/o} \times FQ_{t/o} = \sqrt{\frac{\sum p_t q_o}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_o q_t}} \times \sqrt{\frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_o q_o}$$

This brings us back to our index of nominal change in Equation (1) and the decomposition of the "price effect" and "volume effect" discussed at the start of this paper. From there, it is quite easy to find the implicit Fisher price of GDP by dividing GDP in current dollars by real GDP using the Fisher formula. The Laspeyres and Paasche indexes do not have either of these two properties.

The Income and Expenditure Accounts use the chain Fisher index as a measure of real GDP. Following the same sequence that we used with Equation (4), chaining Equation (6) gives us:

$$(7)\ FQ_C = \sqrt{\frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_o}} \times \ldots \times \sqrt{\frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t-1}}} \times \ldots \times \sqrt{\frac{\sum p_{n-1} q_n}{\sum p_{n-1} q_{n-1}} \times \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_n q_{n-1}}}$$

This is the formula used as the basis of the calculations of real GDP for the National and Provincial Accounts.

4.0 Application to the Income and Expenditure Accounts

In practice, the formulae provided above cannot be used as is, given the absence of data on quantities and price levels. The Accounts have only current value (C) series and price indexes (thus, relative prices). Formulas have to be transformed using the fact that the price multiplied by the quantity ($p_t q_t$) equals the series in current dollars (C_t). We then get formulae expressed in terms of nominal series (C_t) and relative prices (p_t/p_{t-1} or the reverse). This then gives us, for Laspeyres (using Equation (3)):

$$(8)\qquad LV_{t/t-1} = \frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) C_t}{\sum C_{t-1}}$$

... for Paasche (using Equation (5)):

$$(9)\qquad PV_{t/t-1} = \frac{\sum C_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) C_{t-1}}$$

... and lastly, for Fisher (geometric mean of Equations (8) and (9)):

$$(10)\qquad FV_{t/t-1} = \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) C_t}{\sum C_{t-1}} \times \frac{\sum C_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) C_{t-1}}}$$

It is this formula, chained, that is used in practice. The detail of the transformations can be examined in Appendix I.

Since the series are no longer expressed in terms of quantities, we will now refer to them as volume index. The concept of volume is broader than that of quantity, because it includes variations in quality and ultimately, changes in the composition of the economy.

Example 4: In the real world: the deflation method

In the real world, national accountants don't have prices and quantities as shown in the previous examples (with few exceptions). Rather, they have series in nominal terms (in current dollars) and their corresponding prices, as shown in the table below :

		Q1	Q2	Q3	Q4
Cheese (kilograms)	*v*	1,500	1,680	1,944	2,240
	p	15	16	18	20
Wine (liters)	*v*	550	600	608	600
	p	22	20	16	12
Total GDP		2,050	2,280	2,552	2,840

In this example, real GDP will be calculated by the aggregation of the nominal series "deflated" by their prices series. That's what we call the « deflation method ». The aggregation can be done by one or the other indexes presented in the text and expressed in terms of current dollars and prices. For example, the calculation of the Laspeyres index from equation (8) between periods Q2 and Q3 will give us :

$$LV_{Q3/Q2} = \frac{\sum\left(\frac{p_{Q2}}{p_{Q3}}\right)C_{Q3}}{\sum C_{Q2}} = \frac{((16/18)\times 1{,}944)+((20/16)\times 608)}{(1{,}680)+(600)} = \frac{2{,}488}{2{,}280} = 1.091$$

The calculation of the Fisher index for the same period will give :

$$FV_{Q3/Q2} = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{p_{Q2}}{p_{Q3}}\right)C_{Q3}}{\sum C_{Q2}} \times \frac{\sum C_{Q3}}{\sum\left(\frac{p_{Q3}}{p_{Q2}}\right)C_{Q2}}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{((16/18)\times 1{,}944)+((20/16)\times 608)}{(1{,}680)+(600)}\right)\times\left(\frac{(1{,}944)+(608)}{((18/16)\times 1{,}680)+((16/20)\times 600)}\right)} = 1.084$$

If we make the same calculation for each period, that will give us :

	Q1	Q2	Q3	Q4
Unchained Laspeyres index	1.000	1.090	1.091	1.103
Chained Laspeyres index	1.000	1.090	1.190	1.313
Unchained Fisher index	1.000	1.088	1.084	1.095
Chained Fisher index	1.000	1.088	1.179	1.291

We can see that the chained Fisher index gives us a growth of 17.9% between Q1 and Q3, compared to 19.0% for a chained Laspeyres.

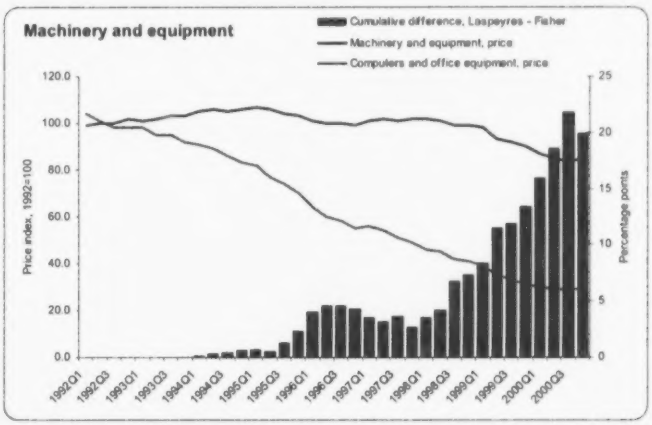
In the 90s, high technology disturbed the price structure ...

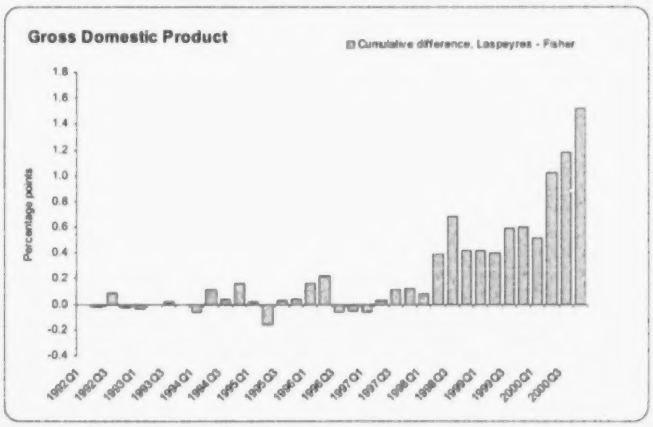
A change phenomenon in the price structure of the economy was observed in the 1990s with the sharp decline in the price of computer equipment in a context of general price increases in other goods. In reality, this "drop" in prices consisted of increases in "quality": for example, at the end of the decade, it was possible to acquire a much more powerful computer than ten years earlier, while paying the same price on the market. In other words, a computer of equal quality or capacity cost much less at the end of the decade. While the price of computer hardware fell steadily, there was a substantial increase in investments and in expenditures in this type of equipment.

...and the deflation method was questioned

In such a context, the limitations of the fixed-base Laspeyres-type methodology used until the spring of 2001 quickly became evident. When calculating real GDP in the late nineties, it was quite clear that the impact of the high technologies on the economy was over-valued since the variations revealed by these series were weighted on their much higher 1992 prices (the base year at the time). Given the growing importance of this sector of the economy and the unusual volatility of its prices, the idea of a mobile-base index quickly came to the fore. In the late nineties, several countries around the world had already turned to chain indexes. In Canada, the choice was made to use the chain Fisher index in keeping with the recommendation of the System of National Accounts 1993 (SNA).

The new way of calculating the real series has had a significant impact on quarterly growth rates. For the *machinery and equipment* aggregate for example, the cumulated differences in growth rates calculated by a fixed-based Laspeyres and a chained Fisher reach as much as 20 percentage points between 1992 and 2000 (see graph below). This cumulative difference reach 1.6 percentage points for the GDP over the same period (see second graph).





4.1 Annual and quarterly National Economic and Financial Accounts

Real aggregates published by the Income and Expenditure Division (IEAD) are calculated using Equation (10) shown above. For each real aggregate, an index is calculated from component series, then chained quarter by quarter as shown in examples 3 and 4. The chained index series thus obtained is then benchmarked to a reference year in order to express it in dollars. Benchmarking consists of putting the level of the chained index series to a level such that, for a given reference year, it is equal to the corresponding aggregate in current dollars, while keeping the quarterly growth rates intact.

Table 1: Level of detail at the national level

Personal expenditure on consumer goods and services	130
Durable goods	22
Semi-durable goods	15
Non-durable goods	14
Services	79
Government current expenditure on goods and services	24
Government gross fixed capital formation	14
Government investment in inventory	1
Business gross fixed capital formation	18
Residential structures	4
Non-residential structures and equipment	14
Non-residential structures	4
Machinery and equipment	10
Business investment in inventory	110
Non-farm	76
Farm	34
Exports of goods and services	69
Goods	64
Services	5
Imports of goods and services	68
Goods	63
Services	5
Statistical discrepancy	1
Gross domestic product at market prices	**435**
Final domestic demand	186

What is the difference between the base period and the reference period?

The prices used to compile the volume indexes are prices from the **base period**, while the period in which the value of a series in constant dollars is equal to the value of said series in current dollars is the **reference period**. In the former real GDP measure, using the fixed-base Laspeyres method, the reference period and the base period were the same. In a chain volume measure, however, the two periods are not necessarily the same. For example, the chain Fisher series in our publication are referenced in 1997 (current dollars equal constant dollars for 1997) but the base corresponds to a combination of the current period and the period immediately before the current period, because it is a chain Fisher index. The reference period serves only to benchmark the series and a change in the reference period does not change any aspect of the growth rates of the series or the aggregates. The only change occurs with the levels, which are benchmarked on a different value.

For this reason, the chain Fisher series currently published cannot be said to be "at 1997 prices", because the prices of the reference period are not used in any way in the calculation of the quarters preceding or following the reference year. However, it can said that these are series expressed in real terms, thereby easing the price effects, at a level at which they are equal to the nominal aggregate level for 1997. In other words, a real series in which the reference year is 1997 is the equivalent of a nominal series in which the price effect has been removed since 1997.

The level of detail - that is, the number of components used in each of the aggregates - is determined by the availability of data and by certain determinants of overall quality (such as the stability of seasonality). At the national level, 435 series in current dollars and the same number of corresponding price series are used to calculate real GDP using the chain Fisher index. The following table shows how these series are distributed between the various aggregates presented in Table 3 of the publication *National Income and Expenditure Accounts, Quarterly Estimates* (13-001).

None of the Fisher index calculations are done on an annual basis. The real annual aggregates are simple averages of the year's four quarters. These are the official measures of real annual national GDP.

4.2 The problem of inventory

For most of the items in publication Table 3 and other tables in real terms, the Fisher calculation does not present any real technical problems. This is not the case for the investment in inventory series, which are first-difference series. Since these series fluctuate around zero, the Laspeyres and Paasche indexes take opposite signs; since Fisher is the geometric mean of these two indexes, it becomes indeterminate.

As published by the IEAD, real investment in inventories is not the result of a direct chained Fisher calculations as shown above, but rather an approximation. The approach used by the IEAD is based on

the fact that an investment in inventory represents the variation of a total stock, which is always positive. In principle, a Fisher index can be calculated on a total stock series. Once this index is benchmarked to the dollar value of a reference year, one can suppose that the first differences of this series, in dollars, represents an estimate of the real series of the investment in inventories.

If such a method is easily applicable to the calculation of the real inventory series, it is however unusable in the context of the calculation of real GDP. !ndeed, the calculation of real GDP should be done with series of investment in inventories, and not with series of total stock. To bypass this problem, the IEAD uses two series of total stock rather than one for each series of investment in inventories: a first series of the stock in the current period (with a positive sign); and a second series, of the stock in the previous period (with a negative sign). This last series is in fact a series of total stock with a one-period lag. At any time t, the difference between these two series corresponds to the investment in inventories during the same period. If in the GDP we replace every series of investment in inventories by these two series of stocks, one positive and the other negative and lagged, we can calculate the real GDP with the chained Fisher index formula. The prices used for total stocks are those of investment in inventories.

The calculation of the real aggregates of investment in inventories involves the same series of total stock. For each aggregate of investment in inventories, a chain Fisher index is obtained from the series of total stock in the current period and another one from the series of the lagged total stock. Once benchmarked to the reference period, these chained Fisher series can be subtracted from each other to simulate a real series of investment in inventories. This is the way that the real aggregates of the investment in inventories are calculated by the Income and Expenditure Accounts Division.

The methodology for calculating the investment in inventory explains the fact that, in Table 1, there are 110 inventory series used in the Fisher calculation, of which 76 are non-agricultural and 34 agricultural (when, in fact, there are 55 inventory series published in current dollars, of which 38 are non-agricultural and 17 agricultural).

4.3 Provincial Accounts

At the provincial level, real values are calculated the same way as they are at the national level, but on an annual basis. Investment in inventory is calculated according to the methodology described above, on an annual basis, with average prices for the year.

The level of detail of the provincial accounts differs from that of the quarterly national accounts. For each province, 502 series are used in calculating real GDP. Table 2 shows the distribution of these series through the items in Table 3 of the publication *Provincial Economic Accounts* (13-213). This distribution is slightly different than the national structure because of the different availability and quality of provincial data.

Table 2: Level of detail at the provincial level

Personal expenditure on consumer goods and services	130
Durable goods	22
Semi-durable goods	15
Non-durable goods	14
Services	79
Government current expenditure on goods and services	24
Government gross fixed capital formation	3
Government investment in inventory	1
Business gross fixed capital formation	5
Residential structures	3
Non-residential structures and equipment	2
Non-residential structures	1
Machinery and equipment	1
Business investment in inventory	110
Non-farm	76
Farm	34
Exports of goods and services	114
Exports to other countries	57
Exports to other provinces	57
Imports of goods and services	114
Imports from other countries	57
Imports from other provinces	57
Statistical discrepancy	1
Gross domestic product at market prices	**502**
Final domestic demand	162

Sources of bias between the national and provincial system

The national and provincial systems are additively consistent when expressed in nominal value. However, in real terms, the properties of the chain Fisher index are such that this consistency can no longer be guaranteed.

First, real series based on a chain Fisher calculation are not additive. This means that for each province and for Canada as a whole, the sum of the aggregates will not equal the main aggregate (for example, the sum of the aggregates of Table 3 in our publication does not equal GDP). Another consequence of this non-additivity problem is that for each aggregate, the sum of the provinces will not equal the national level (for example, the sum of expenditure on consumer goods and services in all of the provinces will not equal the national expenditure on consumer goods and services).

Secondly, real series are calculated differently at the national and provincial levels. While the national annual series represent an average of the quarters, the provincial annual series represent a chain Fisher index calculated on the year. These two different methodologies produce different results.

Thirdly, there are theoretically two ways to calculate real series at the national level. Fisher indexes can be calculated with the national series (these being the sum of the provincial series), or calculated directly with the provincial series. Since Fisher is an index sensitive to the number of series involved in the calculation, the two calculations do not produce exactly the same result.

Lastly, the level of detail is different between the national and provincial calculations (435 and 502 series, respectively). Since Fisher is an index sensitive to the number of series involved in the calculation, the difference in level of detail produces an inevitable bias between the national and provincial calculation. For these reasons, it is unlikely that the provincial real GDP series will be additively consistent with the national series.

5.0 The problem of non-additivity

The chain Fisher series published by the Income and Expenditure Accounts Division are not additive, and this problem increases with distance from the reference period. Non-additivity of real series comes both from chaining and from the Fisher formula itself. Chaining destroys the additive consistency of accounting equations and the Fisher formula (as opposed to the Laspeyres formula) doesn't have the additivity property.

The fact that the real series are not additive makes them more difficult to manipulate than in the past, when the calculations were based on a fixed-base Laspeyres index. For example, it becomes difficult to measure the contribution of an individual aggregate or sector to a bigger whole knowing that the sum of the aggregates does not add up to the total. It is also imprudent to create aggregates from other aggregates.

There are a variety of ways to overcome this additivity problem. For some summary analysis, current dollar data may be enough and even desirable, because they reflect the economic structure at current prices. This is especially true if the aggregates being studied do not exhibit large price variations or if these variations are relatively uniform.

For those who want to use real data and create aggregations, one solution is to calculate Fisher indexes using existing Fisher data. Diewert (1978) demonstrated that a Fisher index was approximately consistent, and that therefore it was possible to calculate Fisher indexes from aggregates already in Fisher, what he called a "Fisher of Fishers". This solution provides a valid approximation provided that the aggregates used in the calculation are relatively consistent in terms of prices (this solution should not be used, for example, if the calculation involves inventory series).

A more "structural" solution is to play with the benchmarking frequency. Since additivity decreases with distance from the reference year, rebenchmarking the series to bring the reference year closer may alleviate part of the problem without, however, making the whole strictly additive. It is important to note that, in the case of real data based on chain Fisher index calculations, changing the reference period does not have any impact on the growth rates of real series.

Since it is not possible to make the levels additive, the IEAD, following the lead of the Bureau of Economic Analysis in the United States, suggests a strictly additive decomposition of the variations of the aggregates for tables published from real data. The formula used reweights the contributions to the series in such a way that they become strictly additive at the total variation of the aggregate:

(11) $$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{(p^i_{t-1} + {p^i_t}/{FP_t}) \times (q^i_t - q^i_{t-1})}{\sum_i (p^i_{t-1} + {p^i_t}/{FP_t}) \times q^i_{t-1}}$$

Or, in a form that applies to nominal series and to prices,

(11a) $$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{\left({\sum_i C_t}/{\sum_i C_{t-1}}\right) \times \left(C^i_t\left({p^i_{t-1}}/{p^i_t}\right) - C^i_{t-1}\right) + FV_t\left(C^i_t - C^i_{t-1}\left({p^i_t}/{p^i_{t-1}}\right)\right)}{\sum_i C_t + FV_t \sum_i C_{t-1}\left({p^i_t}/{p^i_{t-1}}\right)}$$

This formula is the basis of the contribution to change series published by the SNA. A detailed mathematical demonstration is available in Appendix II.

Contribution to a GDP change series

The contribution of an aggregate to the percentage change in GDP in real terms is presented in Table 4 of the quarterly publication (13-001). Contribution to change tables are also calculated for various grand aggregates (see Tables 18, 21, 24 and 27).

Each of these tables follows the layout of the corresponding real data table. Instead of real data, they show the percentage contribution to the variation of the reference aggregate mentioned in the table's title. For example, Table 4 of our quarterly publication follows the layout of Table 3, and shows the contribution of the aggregates in Table 3 to the percentage growth in real GDP. These contributions are not presented as proportions, but directly as percentage points. For example, a contribution of the aggregate of personal consumption expenditure of 0.453 to real GDP growth of 1.473% means that 0.453 percentage points of the 1.473 are due to personal consumption expenditure.

The formula for percentage contribution to change presented earlier applies only to a single period. To use the same formula over a longer period of time, a Fisher non-chained value is required where the weighting bases correspond to the periods to be analysed. For example, to analyse the growth in durable consumer goods between the fourth quarter of 1996 and the fourth quarter of 2000, it is possible to calculate a Fisher index in which the weighting is explicitly a function of the prices in the fourth quarter of 1996 and of the fourth quarter of 2000. To some degree, it amounts to a fixed-base Fisher index. Once this index has been calculated, the percentage contribution to change formula can be used directly.

Users can do such calculations themselves, if they have all of the series included in the aggregate. Otherwise, they can be prepared by Statistics Canada on request.

Appendix I

Transformation of Laspeyres and Paasche indexes

Laspeyres volume index

The best known volume index is Laspeyres. For this index, weighting is done using prices from a pre-determined base year.

(1) $$LQ_{t/o} = \frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o}$$

or, in a version that can be chained:

(2) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$$

where: LQ is the Laspeyres quantity index for period t in relation to period o
p represents the price series
q represents the quantity series

By using the identity $C = pq$ (value equals price multiplied by quantity), formula (2) can be expressed in a more usable form:

(3) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_{t-1}\left(\frac{p_t}{p_t}\right) q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \quad \Rightarrow$$

(4) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) p_t q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$$

and:

(5) $$LV_{t/t-1} = \frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) C_t}{\sum C_{t-1}}$$

Paasche volume index

As well as referring to a previous period, a volume index can be based on prices from the current period. This is known as a Paasche index.

(6) $$PQ_{t/o} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}$$

or, in a version that can be chained:

(7) $$PQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t-1}}$$

By performing the same substitutions that we did with the Laspeyres index, we get:

(8) $$PQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t \left(\frac{p_{t-1}}{p_{t-1}}\right) q_{t-1}} \quad \Rightarrow$$

(9) $$PQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) p_{t-1} q_{t-1}}$$

and:

(10) $$PV_{t/t-1} = \frac{\sum C_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) C_{t-1}}$$

Appendix II

Contribution to change formula

The axiomatic approach suggested by Yuri Dikhanov (1997) and Christian Ehemann (1997) of the *Bureau of Economic Analysis* is based on the fact that a Fisher volume index is an average of a Laspeyres index, which evaluates the variation in a quantity for a component *i* at price p_o, and a Paasche index, which evaluates the variation in volume for the same component at price p_1. An additive decomposition of a Fisher index using a weighted average for prices p_o and p_1 to evaluate the variation in volume for component *i* is therefore justified. In general, such a decomposition can take the following form:

(1) $$G(t) = \frac{\sum_i (p_{t-1}^i + \lambda p_t^i) \times q_t^i}{\sum_i (p_{t-1}^i + \lambda p_t^i) \times q_{t-1}^i}$$

where *G(t)* represents some kind of index. The solution for λ can be deducted as follows:

(1.a) $$G(t) = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i + \lambda \sum_i p_t^i q_t^i}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + \lambda \sum_i p_t^i q_{t-1}^i}$$

(1.b) $$\Rightarrow \quad G(t)\left(\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + \lambda \sum_i p_t^i q_{t-1}^i\right) = \sum_i p_{t-1}^i q_t^i + \lambda \sum_i p_t^i q_t^i$$

(1.c) $$\Rightarrow \quad G(t)\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + \lambda G(t)\sum_i p_t^i q_{t-1}^i = \sum_i p_{t-1}^i q_t^i + \lambda \sum_i p_t^i q_t^i$$

(1.d) $$\Rightarrow \quad \lambda G(t)\sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \lambda \sum_i p_t^i q_t^i = \sum_i p_{t-1}^i q_t^i - G(t)\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i$$

thus:

(2) $$\lambda = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i - G(t)\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{G(t)\sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \sum_i p_t^i q_t^i}$$

Where *G(t)* is given by a Laspeyres index, we would have:

(2.a) $$\lambda = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i - \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i} \sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{\frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i} \sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \sum_i p_t^i q_t^i}$$

which leads immediately to $\lambda = 0$.

Thus, for a Laspeyres index, the contribution $\%\Delta_{i,t-1/t}$ is given by (by subtracting 1 and multiplying formula (1) by 100):

(3) $$\%\Delta_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{p_{t-1}^i (q_t^i - q_{t-1}^i)}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}$$

which takes us back to formula (3) of the text. This result is understandable in light of the additive consistency of the Laspeyres index.

Where $G(t)$ is given by a Fisher index, we have:

(2.b) $$\lambda = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i - FV_t \sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{FV_t \sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \sum_i p_t^i q_t^i}$$

where FV_t is the Fischer volume index at time t. By dividing the numerator and denominator by $\Sigma p_t q_t$, we obtain:

(2.c) $$\lambda = \frac{\frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i}{\sum_i p_t^i q_t^i} - FV_t \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{\sum_i p_t^i q_t^i}}{FV_t \frac{\sum_i p_t^i q_{t-1}^i}{\sum_i p_t^i q_t^i} - 1}$$

or:

(2.c') $$\lambda = \frac{\frac{1}{PP_t} - \frac{FV_t}{FV_t FP_t}}{\frac{FV_t}{PV_t} - 1}$$

where PP_t is the Paasche price index at time t, and FP_t is the Fisher price index at time t. If we multiply (2.c') by FP_t at the numerator and denominator, we obtain:

(2.d) $$\lambda = \frac{\frac{FP_t}{PP_t} - 1}{LP_t - FP_t}$$

which, multiplied by PP_t at the numerator and denominator, becomes:

(2.e) $$\lambda = \frac{\frac{PP_t FP_t}{PP_t} - PP_t}{PP_t LP_t - PP_t FP_t}$$

by reducing and using the equivalence $PP_t LP_t = FP_t^2$, we obtain:

(2.f) $$\lambda = \frac{FP_t - PP_t}{FP_t(FP_t - PP_t)} = \frac{1}{FP_t}$$

Formula (1) then becomes:

$$FV_t = \frac{\sum_i (p_{t-1}^i + p_t^i / FP_t) \times q_t^i}{\sum_i (p_{t-1}^i + p_t^i / FP_t) \times q_{t-1}^i} \tag{4}$$

To obtain the contribution of a single component to the percentage growth of the aggregate, we take FV_t-*1* and multiply by 100:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{(p_{t-1}^i + p_t^i / FP_t) \times (q_t^i - q_{t-1}^i)}{\sum_i (p_{t-1}^i + p_t^i / FP_t) \times q_{t-1}^i} \tag{4.a}$$

This formula is sometimes difficult to operationalize given that it is expressed in terms of price and quantity. For a version expressed in terms of current dollar values and prices (as used by the IEAD), we can multiply the numerator and denominator by FV_tFP_t:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{FV_t FP_t (p_{t-1}^i q_t^i + p_t^i q_t^i / FP_t - p_{t-1}^i q_{t-1}^i - p_t^i q_{t-1}^i / FP_t)}{FV_t FP_t \sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + FV_t FP_t \sum_i p_t^i q_{t-1}^i / FP_t} \tag{4.b}$$

or:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{\left(\sum_i C_t / \sum_i C_{t-1}\right) p_{t-1}^i q_t^i + FV_t C_t^i - \left(\sum_i C_t / \sum_i C_{t-1}\right) C_{t-1}^i - FV_t p_t^i q_{t-1}^i}{\sum_i C_t + FV_t \sum_i p_t^i q_{t-1}^i} \tag{4.c}$$

by consolidating the sums of the values in current dollars:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{\left(\sum_i C_t / \sum_i C_{t-1}\right) \times \left(C_t^i \left(p_{t-1}^i / p_t^i\right) - C_{t-1}^i\right) + FV_t \left(C_t^i - C_{t-1}^i \left(p_t^i / p_{t-1}^i\right)\right)}{\sum_i C_t + FV_t \sum_i C_{t-1} \left(p_t^i / p_{t-1}^i\right)} \tag{5}$$

Bibliography

Berthier, J.P. (2002), **Réflexions sur les différentes notions de volume dans les comptes nationaux,** Direction des études et synthèses économique, Institut national de la statistique et des études économiques.

Bureau of Economic Analysis (1998), **Updated Summary NIPA Methodologies, Survey of Current Business.**

Bureau of Economic Analysis (1998), **National Income and Product Accounts 1929-94 - vol.1, definitions and classifications.**

Diewert, W.E. (1978), **Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation,** Econometrica, Vol. 46 no. 4.

Diewert, W.E. (1995), **Price and Volume Measures in the System of National Accounts,** Discussion paper no. 95-02, Department of Economics, University of British Columbia.

Eurostat (2001), **Handbook on price and volume measures in national accounts,** Methods and Nomenclatures.

Inter-Secretariat Working Group on National Accounts (1993), **System of National Accounts 1993,** with the participation of : Commission of the European Communities – Eurostat, International Monetary Fund, Organization for Economic Co-operation and Development, United Nations, World Bank.

Jackson, C. (1996), **The effect of rebasing on GDP**, Technical series no. 35, Statistics Canada, Income and Expenditure Accounts Division.

Kemp, K. and Smith, P. (1988), **Laspeyres, Paasche and Chain Price Indexes in the Income and Expenditure Accounts,** Technical series no. 1, Statistics Canada, Income and Expenditure Accounts Division.

Landefeld, J.S. and Parker, R.P. (1997), **BEA's Chain Indexes, Time Series, and Measures of Long-Term Economic Growth**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Landefeld, J.S. and Parker, R.P. (1995), **Preview of the Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts: - BEA's New Featured Measures of Output and Prices,** Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Marshall, B.R., Diewert, W.E. and Ehemann, C. (2000), **Additive Decompositions for Fisher, Törnqvist and Geometric Mean Indexes,** Discussion Paper no. 01-01, Department of Economics, University of British Columbia.

McLennan, W. (1998), **Introduction of Chain Volume Measures in the Australian National Accounts,** Information paper 5248.0, Australian Bureau of Statistics.

Moulton, B.R., Parker, R.P. and Seskin, E.P. (1999), **A Preview of the 1999 Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts - Definitional and Classificational Changes**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Moulton, B. R. and Seskin, E.P. (1999), **A Preview of the 1999 Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts - Statistical Changes**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Moulton, B.R. and Sullivan, D.F. (1999), **A Preview of the 1999 Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts - New and Redesigned Tables**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Rossiter, R.D. (2000), **Fisher Ideal Indexes in the National Income and Products Accounts,** Journal of Economic Education, Fall 2000.

Saulnier, M. (1990), **Real Gross Domestic Product: Sensitivity to the Choice of Base Year**, Technical series no. 6, Statistics Canada, Income and Expenditure Accounts Division.

Seskin, E.P. (1999), **Improved Estimates of the National Income and Product Accounts for 1959-98 - Results of the Comprehensive Revision**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Triplett, J.E. (1992), **Economic Theory and BEA's Alternative Quantity and Price Indexes**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Varvares, C., Prakken, J. and Guirl, L. (1997), **Macro Modeling with Chain-type GDP,** Macroeconomic Advisers, LLC.

Whelan, K. (2002), **A Guide to U.S. Chained Aggregated NIPA Data,** Review of Income and Wealth, Series 48, no. 2.

Wilson, K. (1991), **The Introduction of Chain Volume Indexes in the Income and Expenditure Accounts,** Technical series no. 14, Statistics Canada, Income and Expenditure Accounts Division.

Young, A.H. (1993), **Alternate Measures of Change in Real Output and Prices, Quarterly Estimates for 1959-92**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Young, A.H. (1992), **Alternate Measures of Change in Real Output and Prices**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Documents from the OECD meeting of national accounts experts:

September 2000, **U.S. National Income and Products Accounts: Annual and quarterly chain measures of quantity and prices**, Bureau of Economic Analysis, U.S. Department of Commerce.

September 2000, **The Chain Index for GDP Volume Measures: the Italian Experience**, ISTAT – ITALY.

September 2000, **Consistent Aggregation and Chaining of Price and Quantity Measures,** University of Munich, Germany.

September 2000, **Chain Volumes Based on the Hillinger Aggregation Method**, National Accounts - OECD, France.

September 2000, **How the Chain-Additivity Issue is Treated in the U.S. Economic Accounts,** Bureau of Economic Analysis, U.S. Department of Commerce.

September 1998, **Quarterly Chain Series**, Statistics Netherlands.

September 1998, **Introduction of chain volume measures - the Australian experience**, Australian Bureau of Statistics.

Technical Series

The Income and Expenditure Accounts Division (IEAD) has a series of technical paper reprints, which users can obtain without charge. A list of the reprints currently available is presented below. For copies, contact the client services representative at 613-951-3810 or write to IEAD, Statistics Canada, 21st Floor, R.H. Coats Building, Tunney's Pasture, Ottawa, Ontario, K1A OT6. (Internet: iead-into-dcrd@statcan.ca)

1. "Laspeyres, Paasche and Chain Price Indexes in the Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, fourth quarter 1988.
2. "Technical Paper on the Treatment of Grain Production in the Quarterly Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1989.
3. "Data Revisions for the Period 1985-1988 in the National Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1989.
4. "Incorporation in the Income and Expenditure Accounts of a Breakdown of Investment in Machinery and Equipment", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1989.
5. "New Provincial Estimates of Final Domestic Demand at Constant Prices", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, fourth quarter 1989.
6. "Real Gross Domestic Product: Sensitivity to the Choice of Base Year", reprinted from ***Canadian Economic Observer***, May 1990
7. "Data Revisions for the Period 1986 1989 in the National Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1990.
8. "Volume Indexes in the Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1990.
9. "A New Indicator of Trends in Wage Inflation", reprinted from ***Canadian Economic Observer***, September 1989.
10. "Recent Trends in Wages", reprinted from ***Perspectives on Labour and Income***, winter 1990.
11. "The Canadian System of National Accounts Vis-à-Vis the U.N. System of National Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1990.
12. "The Allocation of Indirect Taxes and Subsidies to Components of Final Expenditure", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1990.
13. "The Treatment of the GST in the Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1991.
14. "The Introduction of Chain Volume Indexes in the Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1991.
15. "Data Revisions for the Period 1987-1990 in the National Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, second quarter 1991.
16. "Volume Estimates of International Trade in Business Services", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1991.
17. "The Challenge of Measurement in the National Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, fourth quarter 1991.
18. "A Study of the Flow of Consumption Services from the Stock of Consumer Goods", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, fourth quarter 1991.
19. "The Value of Household Work in Canada, 1986", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1992.
20. "Data Revisions for the Period 1988-1991 in the National Income and Expenditure Accounts", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, Annual Estimates, 1980-1991.
21. "Cross-border Shopping - Trends and Measurement Issues", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1992.
22. "Reading Government Statistics: A User's Guide", reprinted from ***Policy Options***, Vol. 14, No. 3, April 1993.

23. "The Timeliness of Quarterly Income and Expenditure Accounts: An International Comparison", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1993.

24. "National Income and Expenditure Accounts: Revised Estimates for the period from 1989 to 1992", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, Annual Estimates, 1981-1992.

25. "International Price and Quantity Comparisons: Purchasing Power Parities and Real Expenditures, Canada and the United States", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, Annual Estimates, 1981-1992.

26. "The Distribution of GDP at Factor Cost by Sector", reprinted from ***National income and Expenditure Accounts***, third quarter 1993.

27. "The Value of Household Work in Canada, 1992", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, fourth quarter 1993.

28. "Assessing the Size of the Underground Economy: The Statistics Canada Perspective", reprinted from ***Canadian Economic Observer***, May 1994.

29. "National Income and Expenditure Accounts: Revised Estimates for the period from 1990 to 1993", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, first quarter 1994.

30. "The Canadian National Accounts Environmental Component: A Status Report", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, Annual Estimates, 1982-1993.

31. "The Tourism Satellite Account", reprinted from ***National income and Expenditure Accounts***, second quarter 1994.

32. "The 1993 International System of National Accounts: Its implementation in Canada", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1994.

33. "The 1995 Revision of the National Economic and Financial Accounts", reprinted from ***National Economic and Financial Accounts***, first quarter 1995.

34. "A Primer on Financial Derivatives", reprinted from ***National Economic and Financial Accounts***, first quarter 1995.

35. "The Effect of Rebasing on GDP", reprinted from ***National Economic and Financial Accounts***, second quarter 1996

36. "Purchasing Power Parities and Real Expenditures, United States and Canada - An Update to 1998", reprinted from ***National Income and Expenditure Accounts***, third quarter 1999.

37. "Capitalization of Software in the National Accounts", ***National Income and Expenditure Accounts***, February 2002.

38. "The Provincial and Territorial Tourism Satellite Accounts for Canada, 1996", ***National Income and Expenditure Accounts***, April 2002.

39. "Purchasing Power Parities and Real Expenditures, United States and Canada", ***National Income and Expenditure Accounts***, June 2002.

40. "The Provincial and Territorial Tourism Satellite Accounts for Canada, 1998", ***National Income and Expenditure Accounts***, June 2003.

41. "Government revenue attributable to tourism, 1998", ***National Income and Expenditure Accounts***, September 2003.

42. "Chain Fisher Index Volume Methodology", ***National Income and Expenditure Accounts***, November 2003.

N° 13-604-MIF au catalogue — N° 42
ISSN: 1707-1844
ISBN: 0-662-75118-3

Document de recherche

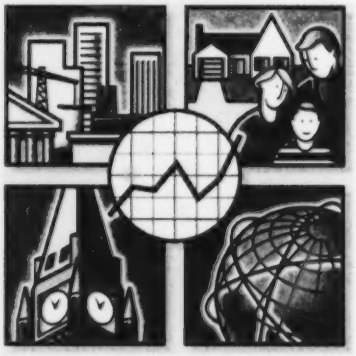
Compte des revenus et dépenses série technique

Méthodologie de l'indice de volume en chaîne Fisher

par Michel Chevalier

Division des comptes des revenus et dépenses
21e étage, Immeuble R.H. Coats, Ottawa, K1A 0T6

Téléphone: 1 613 951-3640



Les opinions émises par l'auteur de ce document ne reflètent pas nécessairement celles de Statistique Canada.

Statistique Canada Statistics Canada

Canada

Méthodologie de l'indice de volume en chaîne Fisher

Le 31 mai 2001 les comptes trimestriels des revenus et dépenses ont adopté la formule de l'indice de Fisher, enchaîné trimestriellement, comme mesure officielle du produit intérieur brut réel en termes de dépenses. Cette formule a également été adoptée pour les comptes provinciaux le 31 octobre 2002.

Deux raisons ont motivé l'adoption de cette formule : fournir aux utilisateurs une mesure plus précise de la croissance du PIB réel entre deux périodes consécutives, et rendre comparable la mesure canadienne aux comptes des revenus et des produits des États-Unis, qui utilisent la formule de l'indice de Fisher en chaîne depuis 1996 pour mesurer le PIB réel.

Ottawa
Novembre 2003

N° 13-604-**MIF** n° 42 au catalogue
ISBN: 0-662-75118-3
ISSN: 1707-1844

N° 13-604-**MPF** n° 42 au catalogue
ISBN: 0-662-75117-5
ISSN: 1707-1828

Publication autorisée par le ministre responsable de Statistique Canada

© Ministre de l'Industrie, 2003

Tous droits réservés. Il est interdit de reproduire ou de transmettre le contenu de la présente publication, sous quelque forme ou par quelque moyen que ce soit, enregistrement sur support magnétique, reproduction électronique, mécanique, photographique, ou autre, ou de l'emmagasiner dans un système de recouvrement, sans l'autorisation écrite préalable des Services de concession des droits de licence, Division du marketing, Statistique Canada, Ottawa, Ontario, Canada K1A 0T6.

Le papier utilisé dans la présente publication répond aux exigences minimales de l' "American National Standard for Information Sciences" - "Permanence of Paper for Printed Library Materials", ANSI Z39.48 1984.
♾

Table des matières

1.0 Introduction **1**

2.0 Construction d'un indice et enchaînement **1**
Exemple 1 : Une économie de vins et fromages 2
Exemple 2 : La production de vins et fromages sans l'effet prix 3
Exemple 3 : Une autre façon d'enlever l'effet prix 4

3.0 Choix de l'indice **5**

4.0 Application aux Comptes des revenus et dépenses **6**
Exemple 4 : Dans la pratique : la méthode de déflation 7

4.1 Les Comptes économiques financiers nationaux trimestriels et annuels **9**
Niveau de détail à l'échelle nationale 9

4.2 Le problème de l'investissement en stocks **9**

4.3 Les comptes provinciaux **10**
Niveau de détail à l'échelle provinciale 10
Sources de biais entre les systèmes national et provincial 11

5.0 Le problème de la non-additivité **11**
La contribution d'une série à la variation du PIB 12

Annexe I : Transformation des indices de Laspeyres et de Paasche **13**

Annexe II : Formule de contribution à la variation en pourcentage **14**

Bibliographie **17**

Série technique **19**

PUBLICATIONS ÉLECTRONIQUES DISPONIBLES À

www.statcan.ca

Méthodologie de l'indice de volume en chaîne Fisher

par Michel Chevalier

1.0 Introduction

La croissance du produit intérieur brut (PIB) ou de tout autre agrégat en valeur nominale peut être décomposée en deux éléments : un « effet prix », soit la part de la croissance reliée à l'inflation, et un « effet volume », qui recoupe la variation des quantités, de la qualité et de la composition de l'agrégat. L'effet volume est présenté dans les Comptes nationaux par ce que l'on appelle les séries « réelles » (comme le PIB réel).

Dans les Comptes canadiens, l'effet volume est évalué par la méthode de déflation. Cette méthode consiste à enlever l'effet prix de chaque composante faisant partie de l'agrégat, puis à agréger les composantes ainsi déflatées pour obtenir un effet volume « total ».

Il existe plusieurs façons d'agréger les composantes d'un tout dont on veut calculer l'effet volume. La théorie des indices offre une panoplie d'outils à cet effet. L'approche privilégiée par Statistique Canada depuis le printemps 2001 est celle de l'indice en chaîne de Fisher. Cette mesure est théoriquement supérieure à l'ancienne mesure Laspeyres à base fixe, en plus de rendre les données canadiennes comparables aux mesures officielles de l'activité économique des États-Unis. De plus, elle permet d'être conforme aux recommandations du Système de comptabilité nationale de 1993 (SCN 1993).[1]

Les paragraphes suivants expliquent, de manière simplifiée, les méthodes dorénavant utilisées par les Comptes nationaux pour mesurer l'activité économique réelle du pays.

2.0 Construction d'un indice et enchaînement

Un agrégat donné (PIB ou autre) en valeur nominale représente une sommation de quantités évaluées dans une même unité monétaire, aux prix de la période courante. Pour prendre l'exemple du PIB, cette sommation peut s'exprimer par PIB = Σpq, soit la somme de toutes les quantités de biens et services transigés dans l'économie, multipliées par leurs prix respectifs. La variation du PIB nominal, entre une période *o* et une période *t*, peut donc être exprimée, sous forme indicielle[2], par :

(1) $$\Delta PIB_{t/o} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_o q_o}$$

où : $\Delta PIB_{t/o}$ est l'indice de valeur du PIB
p_t est le prix au temps *t*
p_o est le prix au temps *o*
q_t est la quantité au temps *t*
q_o est la quantité au temps *o*

[1] *Système de comptabilité nationale 1993. Préparé sous les auspices du Groupe de travail intersecrétariats sur la comptabilité nationale : Commission des Communautés européennes; Fonds monétaire international; Organisation de coopération et de développement économiques; Nations Unies; Banque Mondiale. Bruxelles/Luxembourg, New York, Paris, Washington, D.C., 1993.*

[2] *C'est-à-dire en mettant en rapport la grandeur de la période courante à la grandeur d'une période précédente.*

L'Exemple 1 : Une économie de vins et fromages, montre un calcul de l'indice de valeur d'un PIB.

La variation donnée par cette formule peut théoriquement être divisée en une variation des prix et une variation des quantités. S'il existait un « prix moyen » du PIB, on pourrait tout simplement diviser la variation du PIB (donnée par l'équation (1)) par ce prix moyen pour obtenir la variation moyenne des quantités. La plupart du temps dans les comptes nationaux, un tel prix moyen n'existe pas. La variation totale des quantités ne peut donc être calculée qu'en faisant la somme des variations de quantités dans l'économie.

Exemple 1 : Une économie de vins et fromages...

Dans une économie insulaire où il n'y aurait que du vin et du fromage, nous trouvons le portrait suivant de la production des quatre derniers trimestres :

		T1	T2	T3	T4
Fromage (kilogrammes)	q	100	105	108	112
	p	15	16	18	20
	v	1 500	1 680	1 944	2 240
Vin (litres)	q	25	30	38	50
	p	22	20	16	12
	v	550	600	608	600
Total PIB	v	2 050	2 280	2 552	2 840

Dans cette économie, la quantité de fromage produite augmente de manière régulière, de même que son prix. Par contre, la quantité de vin produite augmente très rapidement alors que son prix baisse de façon marquée.

Quelle serait la croissance du PIB nominal entre, disons, T1 et T3? Le calcul de l'indice de l'équation (1) nous fournit la réponse :

$$\Delta PIB_{T3/T1} = \frac{\sum p_{T3} q_{T3}}{\sum p_{T1} q_{T1}} = \frac{(108 \times 18) + (38 \times 16)}{(100 \times 15) + (25 \times 22)} = \frac{2552}{2050} = 1{,}245$$

La croissance de l'économie, en termes nominaux, sera donc de 24,5 % entre les trimestres T1 et T3 (on obtient la croissance en pourcentage en soustrayant 1 du rapport donné par l'indice et en multipliant par 100).

Ce calcul peut être effectué pour toutes les périodes par rapport à T1. À la fin, on obtient un indice couvrant les quatre périodes :

		T1	T2	T3	T4
ΔPIB	i	1,000	1,090	1,245	1,385

Quelle serait la croissance entre les périodes T3 et T4? Cette fois, le rapport des indices en T3 et T4 nous fournit la réponse :

$$\Delta PIB_{T4/T3} = \frac{1{,}385}{1{,}245} = 1{,}112$$

La croissance sera donc de 11,2 % entre les périodes T3 et T4.

Or, faire une telle somme est problématique du fait que l'on ne peut additionner des quantités dont les unités sont physiquement différentes, comme par exemple des voitures et des téléphones, voire deux différents modèles de voiture. Les quantités doivent donc être réévaluées selon une unité commune. Dans une économie monétisée, le plus simple est d'exprimer les quantités en termes monétaires : une fois évaluées, c'est-à-dire multipliées par des prix, les quantités peuvent être aisément agrégées.

Une forme intuitive de mesurer les variations de quantité à travers le temps est de prendre les prix disponibles à une période donnée et de multiplier les quantités des périodes subséquentes par ces mêmes prix. Il s'agit en fait de réévaluer les quantités courantes à des prix fixes dans le temps, ce qui a pour effet d'« enlever » l'effet prix. En termes mathématiques, on retrouve ainsi la formule de l'indice de Laspeyres à base fixe :

(2) $$LQ_{t/o} = \frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o}$$

où : $LQ_{t/o}$ est l'indice de quantité de Laspeyres
p_o est le prix en temps *o*
q_t est la quantité au temps *t*
q_o est la quantité au temps *o*

L'unique différence d'avec l'équation (1) se trouve au numérateur, où les quantités au temps *t* sont multipliées cette fois par les prix du temps *o*. Une application de cette formule est illustrée à l'*Exemple 2 : La production de vins et fromages sans l'effet prix*.

Il est évident qu'avec une telle formulation, les résultats dépendent fortement de la structure des prix au moment *o*. S'il s'avère que cette structure change avec le temps, par exemple par suite de la chute du prix d'une composante comparativement aux autres, l'indice de l'équation (2) devient éventuellement biaisé du fait qu'il dépend alors d'une structure de prix devenue désuète.

Une façon de contourner ce genre de problème est de mettre à jour périodiquement la base de pondération de manière à la rapprocher de la période courante. Cette technique a été utilisée par le passé dans le Système des comptes nationaux (SCN), alors que les séries réelles étaient rebasées à tous les cinq ou six ans afin de refléter les changements dans la structure des prix.

Exemple 2 : La production de vins et fromages sans l'effet prix...

Toujours dans notre économie de vins et fromages, nous voulons cette fois évaluer l'augmentation du PIB, entre les périodes T1 et les périodes T2, T3 et T4, excluant l'effet prix. Dans notre tableau de bord de l'économie, nous nous servons cette fois des prix en T1 comme « prix fixes » :

		T1	T2	T3	T4
Fromage (kilogrammes)	q	100	105	108	112
	p	15	16	18	20
	v	1 500	1 680	1 944	2 240
Vin (litres)	q	25	30	38	50
	p	22	20	16	12
	v	550	600	608	600
Total PIB		2 050	2 280	2 552	2 840

En appliquant l'équation (2), on obtient, pour la croissance entre T1 et T3 :

$$LQ_{T3/T1} = \frac{\sum p_{T1} q_{T3}}{\sum p_{T1} q_{T1}} = \frac{(108 \times 15) + (38 \times 22)}{(100 \times 15) + (25 \times 22)} = \frac{2456}{2050} = 1{,}198$$

La croissance du PIB réel est de 19,8 % entre T1 et T3. L'indice peut être calculé pour toutes les périodes, toujours en se servant de T1 comme base :

		T1	T2	T3	T4
$LQ_{t/T1}$	i	1,000	1,090	1,198	1,356

Cette fois, la croissance entre les périodes T3 et T4, excluant l'effet prix, est de 13,2 % :

$$\Delta LQ_{T4/T3} = \frac{1{,}356}{1{,}198} = 1{,}132$$

À noter que cette croissance du PIB réel entre T3 et T4 est supérieure à celle du PIB nominal, qui est de 11,2 %. Selon l'indice de Laspeyres à base fixe, le prix implicite du PIB, soit l'indice du PIB nominal divisé par l'indice du PIB réel (on l'appelle aussi le niveau général des prix), a donc baissé entre T3 et T4.

Il peut arriver toutefois que la structure des prix se mette à changer plus rapidement qu'à l'habitude. La base de pondération devient alors rapidement désuète, au point où il peut devenir nécessaire d'accélérer la fréquence du rebasement. Ultimement, la base de pondération peut être déplacée systématiquement de période en période, de sorte qu'elle soit définie comme étant la période précédant la période courante :

(3) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$$

où l'on retrouve, en place du p_o de l'équation (2), p_{t-1}. Cet indice « à base mobile » donne, pour la période courante *t*, la croissance du volume pondérée selon les prix de *t-1*. Il intègre, en quelque sorte, la fréquence du rebasement, ce qui élimine le côté arbitraire d'un rebasement effectué seulement au besoin.

Exemple 3 : Une autre façon d'enlever l'effet prix

Dans l'exemple précédent, la croissance du PIB réel entre T3 et T4 était évaluée en se servant des prix de T1. Or, on peut constater qu'avec le temps, la structure des prix de notre économie insulaire change : le litre de vin, plus cher que le kilogramme de fromage en T1, devient moins cher que celui-ci à partir de T3. Nous mesurerons cette fois la croissance entre T3 et T4 en se servant des prix en T3 comme base.

		T1	T2	T3	T4
Fromage (kilogrammes)	q	100	105	108	112
	p	15	16	18	20
	v	1 500	1 680	1 944	2 240
Vin (litres)	q	25	30	38	50
	p	22	20	16	12
	v	550	600	608	600
Total PIB		2 050	2 280	2 552	2 840

En appliquant l'équation (3), on obtient :

$$LQ_{T4/T3} = \frac{\sum p_{T3} q_{T4}}{\sum p_{T3} q_{T3}} = \frac{(112 \times 18) + (50 \times 16)}{(108 \times 18) + (38 \times 16)} = \frac{2816}{2552} = 1{,}103$$

La croissance du PIB réel est maintenant évaluée à 10,3 % entre T3 et T4, plutôt qu'à 13,1 % avec l'indice Laspeyres à base fixe. Que s'est-il passé? C'est que les variations de quantités dans l'exemple précédent étaient évaluées selon une structure de prix différente : le passage de la production de 38 à 50 litres de vin était évaluée à 22 $/litre, alors que dans le cas présent, cette augmentation de production est évaluée à 16 $/litre. L'augmentation de « quantité » de vin pèse donc moins lourd lors de l'agrégation du PIB.

Quelle sera la croissance entre T1 et T3? Comme l'équation (3) ne mesure qu'une relation entre la période courante et la période précédente, il n'est pas possible de déduire cela directement à partir de cette équation. Par contre, nous pouvons multiplier les croissances successives de chaque période entre T1 et T3. Par exemple, si la croissance est de 2,3 % entre T1 et T2 et de 4,3 % entre T2 et T3, la croissance entre T1 et T3 sera de 1,023 X 1,043 = 1,067, donc 6,7 %. Ce calcul, semblable à celui de l'intérêt composé, illustre le principe même du chaînage. Appliquées à notre économie, les équations (3) et (4) nous donnerons :

	T1	T2	T3	T4
Indice Laspeyres non chaîné	1,000	1,090	1,091	1,103
Indice Laspeyres chaîné	1,000	1,090	1,190	1,313

La croissance entre T1 et T3 sera donc de 19,0 % :

$$\Delta LQ_{T3/T1} = \frac{1{,}190}{1{,}000} = 1{,}190$$

Ce genre d'indice, à l'horizon court, peut être adapté de manière à ce qu'il couvre plusieurs périodes. Les variations entre périodes successives, telles que calculées par l'équation (3) par exemple, peuvent être cumulées, c'est-à-dire multipliées entre elles à la manière d'un calcul d'intérêt composé. C'est ce que l'on appelle l'enchaînement des indices. Dans la chaîne ainsi formée, les prix utilisés pour la pondération sont des prix très récents et ne deviennent jamais obsolètes. Selon notre exemple, un indice chaîné prendrait la forme suivante :

$$(4) \qquad LQ_C = \frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_1 q_2}{\sum p_1 q_1} \times \ldots \times \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \times \ldots \times \frac{\sum p_{n-1} q_n}{\sum p_{n-1} q_{n-1}}$$

où *n* est le nombre de périodes sur lesquelles s'étend l'indice en chaîne. L'*Exemple 3 : Une autre façon d'enlever l'effet prix* illustre comment une telle formule peut être utilisée.

Le Système de comptabilité nationale (1993) recommande l'utilisation d'indices en chaîne. Cette recommandation est suivie par Statistique Canada depuis le printemps 2001 pour les Comptes économiques et financiers nationaux trimestriels et depuis l'automne 2002 pour les Comptes économiques provinciaux ainsi que pour le PIB par industrie. L'enchaînement systématique permet un renouvellement continuel de la base de pondération, évitant ainsi le problème de désuétude qui accompagne l'utilisation d'un indice à base fixe.

3.0 Choix de l'indice

Les exemples ci-dessus réfèrent à un indice de type Laspeyres. La théorie des indices fournit toutefois de nombreux autres indices, qui diffèrent dans la façon dont sont pondérées les composantes. Par exemple, alors que les quantités de l'indice de Laspeyres sont pondérées avec les prix d'une période précédente, elles sont pondérées dans l'indice de Paasche avec les prix de la période courante :

$$(5) \qquad PQ_{t/o} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}$$

où $PQ_{t/o}$ est l'indice de quantité de Paasche.

Cet indice est en fait la réciproque de l'indice de Laspeyres. Utilisé dans sa forme à base fixe, il présente le même problème que celui décrit plus haut, mais à l'inverse : il ne reflète pas adéquatement les changements de structure de l'économie pour les périodes antérieures. Toutefois, l'indice de Paasche peut être enchaîné de la même manière que l'indice de Laspeyres (comme dans l'équation (4)).

Il peut être démontré qu'en général, un indice de quantité de Laspeyres fera apparaître une augmentation dans le temps plus importante qu'un indice de quantité de Paasche. Cela se produit lorsque les prix et les quantités sont négativement corrélés, c'est-à-dire lorsque des biens ou des services devenus relativement plus coûteux sont remplacés par des biens et services devenus relativement moins coûteux. Cet effet de substitution, couramment observé, fait dire à la théorie économique que les indices de Laspeyres et de Paasche fixent les limites supérieures et inférieures d'un indice théorique idéal, moins biaisé.

Cet indice théorique peut être approché par un indice de type Fisher, qui représente la moyenne géométrique d'un indice de Laspeyres et de Paasche :

$$(6) \qquad FQ_{t/o} = \sqrt{LQ_{t/o} \times PQ_{t/o}} = \sqrt{\frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}}$$

où $FQ_{t/o}$ est l'indice de quantité de Fisher.

En plus de sa supériorité théorique, cet indice comporte quelques propriétés souhaitables dans le cadre de la comptabilité nationale. Par exemple, il est « réversible dans le temps », c'est-à-dire que l'indice montrant la variation entre la période *o* et la période *t* est la réciproque de l'indice montrant la variation entre la période *t* et la période *o*. Une autre caractéristique intéressante est la « réversibilité des

facteurs », en vertu de laquelle le produit des indices de prix et de quantité est égal à l'indice de variation des valeurs nominales :

$$FP_{t/o} \times FQ_{t/o} = \sqrt{\frac{\sum p_t q_o}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_o q_t}} \times \sqrt{\frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_o q_o}$$

Nous retrouvons notre indice de variation nominale de l'équation (1) et la décomposition « effet prix » et « effet quantité » évoquée au début de ce texte. Il devient dès lors aisé de trouver le prix implicite Fisher du PIB en divisant le PIB en dollars courants par le PIB réel selon la formule Fisher. Les indices de Laspeyres et de Paasche ne présentent aucune de ces deux propriétés.

Statistique Canada utilise la formule de l'indice Fisher en chaîne comme mesure du PIB réel. Une fois enchaînée à la manière de l'équation (4), l'équation (6) devient :

$$(7)\ FQ_C = \sqrt{\frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_o}} \times \ldots \times \sqrt{\frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t-1}}} \times \ldots \times \sqrt{\frac{\sum p_{n-1} q_n}{\sum p_{n-1} q_{n-1}} \times \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_n q_{n-1}}}$$

C'est la formule qui sert de base aux calculs du PIB réel des Comptes nationaux et provinciaux.

4.0 Application aux Comptes des revenus et dépenses

Dans la pratique, les formules exposées ci-dessus ne peuvent être utilisées telles quelles par la Division des comptes des revenus et dépenses (DCRD), étant donné l'absence de données sur les quantités et sur les niveaux de prix. Seules les séries en valeur courante (C) et leurs indices de prix correspondants (donc les prix relatifs) sont disponibles. Les formules doivent être transformées en utilisant le fait que le prix multiplié par la quantité ($p_t q_t$) équivaut à la série en dollars courants (C_t). On obtient alors des formules exprimées en termes de séries nominales (C_t) et de prix relatifs (p_t/p_{t-1} ou l'inverse). De cette façon, le Laspeyres s'écrit (à partir de l'équation (3)):

$$(8)\qquad LV_{t/t-1} = \frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) C_t}{\sum C_{t-1}}$$

... le Paasche (à partir de l'équation (5)) :

$$(9)\qquad PV_{t/t-1} = \frac{\sum C_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) C_{t-1}}$$

... et enfin, le Fisher (moyenne géométrique des équations (8) et (9)):

$$(10)\qquad FV_{t/t-1} = \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) C_t}{\sum C_{t-1}} \times \frac{\sum C_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) C_{t-1}}}$$

C'est cette formule, chaînée, qui est utilisée dans la pratique. Le détail des transformations peut être examiné à l'Annexe I.

Les séries n'étant plus exprimées ici en termes de quantités, on parlera alors d'indice de volume. La notion de volume est plus large que celle de quantité, puisqu'elle comprend les variations de qualité et, ultimement, les changements dans la composition de l'économie.

Exemple 4 : Dans la pratique: la méthode de déflation

Dans la pratique, les comptables nationaux ne disposent pas des prix et des quantités tels que représentés dans les exemples précédents (à quelques exceptions près). Ils disposent plutôt de séries nominales (en dollars courants) et des prix correspondants, tels qu'illustrés dans le tableau ci-desous :

		T1	T2	T3	T4
Fromage (kilogrammes)	v	1 500	1 680	1 944	2 240
	p	15	16	18	20
Vin (litres)	v	550	600	608	600
	p	22	20	16	12
Total PIB		2 050	2 280	2 552	2 840

Dans cet exemple, le PIB réel sera calculé par l'aggrégation des séries nominales « déflatées » par les séries de prix. C'est ce que l'on appelle la méthode de déflation. L'aggrégation des séries pourra se faire à l'aide de l'un ou l'autre indice présenté dans le texte et exprimés en dollars courants et en prix. Par exemple, le calcul de l'indice Laspeyres de l'équation (8) entre les période T2 et T3 nous donne :

$$LV_{T3/T2} = \frac{\sum\left(\frac{p_{T2}}{p_{T3}}\right)C_{T3}}{\sum C_{T2}} = \frac{((16/18)\times 1944)+((20/16)\times 608)}{(1680)+(600)} = \frac{2488}{2280} = 1{,}091$$

Le calcul de l'indice Fisher sur les mêmes périodes donnera pour sa part :

$$FV_{T3/T2} = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{p_{T2}}{p_{T3}}\right)C_{T3}}{\sum C_{T2}} \times \frac{\sum C_{T3}}{\sum\left(\frac{p_{T3}}{p_{T2}}\right)C_{T2}}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{((16/18)\times 1944)+((20/16)\times 608)}{(1680)+(600)}\right)\times\left(\frac{(1944)+(608)}{((18/16)\times 1680)+((16/20)\times 600)}\right)} = 1{,}084$$

Si on fait le calcul pour chacune des périodes, on obtient :

	T1	T2	T3	T4
Indice Laspeyres non chaîné	1,000	1,090	1,091	1,103
Indice Laspeyres chaîné	1,000	1,090	1,190	1,313
Indice Fisher non chaîné	1,000	1,088	1,084	1,095
Indice Fisher chaîné	1,000	1,088	1,179	1,291

On peut voir que l'indice de Fisher en chaîne nous donne une croissance de 17,9% entre T1 et T3, contre 19,0% pour le Laspeyres en chaîne.

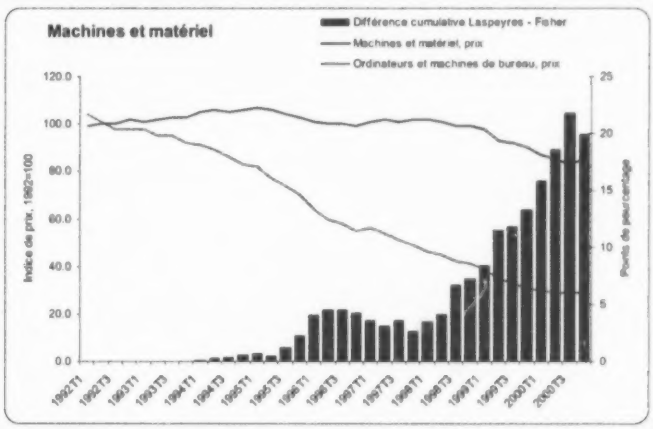
Dans les années 90, la haute technologie bouleverse la structure des prix...

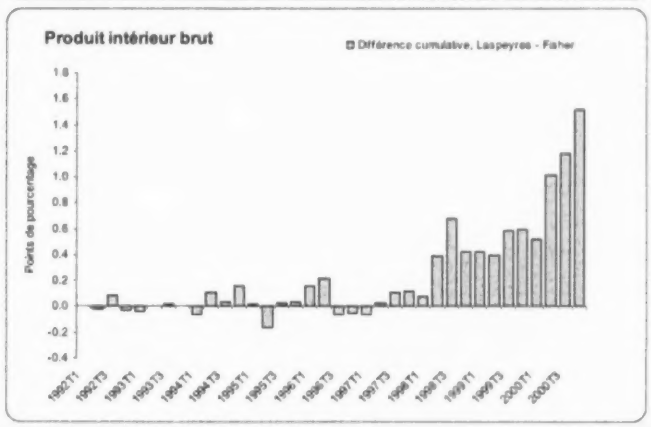
Un phénomène de changement dans la structure des prix de l'économie a pu être constaté au cours des années 90, avec la forte baisse du prix du matériel informatique, dans un contexte de hausse générale des prix des autres biens. Cette « baisse » des prix était en fait constituée d'une hausse de la « qualité » : par exemple, il était possible d'obtenir à la fin de la décennie un ordinateur beaucoup plus puissant que dix ans auparavant, tout en payant le même prix sur le marché. En d'autres termes, à qualité ou capacité égale, un ordinateur coûtait beaucoup moins cher à la fin de la décennie. Alors que les prix du matériel informatique baissaient sans cesse, l'on constatait une hausse substantielle des investissements et des dépenses dans ce genre de matériel.

...et la méthode de déflation est remise en question

Dans un tel contexte, la méthodologie de type Laspeyres à base fixe telle qu'utilisée jusqu'au printemps 2001 a vite montré ses limites. Lors du calcul du PIB réel à la fin des années 90, il était devenu évident que l'impact des hautes technologies sur l'économie était surévalué, puisque les variations montrées par ces séries étaient pondérées selon leur prix beaucoup plus élevé de 1992 (l'année de base utilisée alors). Compte tenu de l'importance croissante de ce secteur dans l'économie et de la volatilité peu commune de ses prix, l'idée d'un indice à base mobile s'est rapidement imposée. À la fin des années 90, plusieurs pays à travers le monde s'étaient déjà tournés vers des indices en chaîne. Au Canada, le choix s'est porté sur la méthodologie de l'indice de Fisher en chaîne, suivant ainsi la recommandation du Système de comptabilité nationale (SCN) de 1993.

Le nouveau mode de calcul des séries réelles a eu un impact significatif sur les taux de croissance trimestriels. Pour l'agrégat machines et matériel par exemple (qui contient de l'investissement en matériel informatique), les différences cumulées des taux de croissances calculés par les indices Laspeyres à base fixe et Fisher en chaîne ont atteint plus de 20 points de pourcentage entre 1992 et 2000 (voir graphique ci-dessous). Cette différence cumulative a atteint 1,6 points de pourcentage pour le PIB au cours de la même période (voir second graphique).





4.1 Les Comptes économiques et financiers nationaux trimestriels et annuels

Les agrégats réels publiés par la Division des comptes des revenus et dépenses sont déterminés à l'aide de l'équation (10) vue ci-dessus. Pour chaque agrégat réel, un indice est calculé à partir des séries composantes, puis chaîné d'un trimestre à l'autre à la manière présentée dans les exemples 3 et 4. La série d'indices chaînés ainsi obtenue est par la suite étalonnée sur une année de référence de manière à l'exprimer en dollars. L'étalonnage consiste mettre la série d'indices chaînés à un niveau tel que, pour une année de référence donnée, elle soit égale à la série de l'agrégat correspondant en dollars courants, et ce tout en maintenant les taux de croissance intacts d'un trimestre à l'autre.

Période de référence vs. période de base

Les prix utilisés pour compiler les indices de volume sont les prix de la période de base, tandis que la période où la valeur d'une série en dollars constants est égale à la valeur de la dite série en dollars courants constitue la période de référence. Dans l'ancienne mesure du PIB réel selon la méthode de Laspeyres à base fixe, la période de référence et la période de base étaient les mêmes. Dans une mesure de volume en chaîne par contre, les deux périodes ne coïncident pas nécessairement. Par exemple, les séries du Fisher en chaîne de notre publication sont référencées en 1997 (les dollars courants égalent les dollars constants pour l'année 1997) mais la base correspond à un amalgame de la période courante et de la période qui précède immédiatement la période courante, puisqu'il s'agit d'indices en chaîne Fisher. La période de référence ne sert donc qu'à étalonner les séries et un changement de la période de référence ne modifie en aucun cas les taux de croissance des séries ou des agrégats. Le seul changement se trouve sur les niveaux, qui sont étalonnés sur une valeur différente.

Compte tenu de ce qui précède, on ne peut dire que les séries du Fisher en chaîne actuellement publiées sont « aux prix de 1997 », puisque les prix de la période de référence ne rentrent aucunement dans le calcul des trimestres précédents ou subséquents à l'année de référence. On peut cependant dire qu'il s'agit de séries exprimées en termes réels, donc soulagées des effets de prix, à un niveau tel qu'elles égalent le niveau de l'agrégat nominal pour l'année 1997. En d'autres termes, une série réelle dont l'année de référence est 1997 est l'équivalent d'une série nominale à laquelle on aurait enlevé l'effet prix depuis 1997

Le niveau de détail – ou le nombre de composantes qui entre dans chacun des agrégats – est déterminé par la disponibilité des données et par certains déterminants de la qualité générale (comme par exemple la stabilité de la saisonnalité). Au niveau national, 435 séries en dollars courants et le même nombre de séries de prix correspondants entrent dans le calcul du PIB réel selon l'indice en chaîne de Fisher. Le tableau suivant montre comment ces séries sont réparties entre les divers agrégats présentés dans le Tableau 3 de la publication *Comptes nationaux des revenus et dépenses, estimations trimestrielles* (13-001).

Aucun calcul de l'indice Fisher n'est effectué sur une base annuelle. Les agrégats réels annuels sont les moyennes simples des quatre trimestres de l'année. Ce sont là les mesures officielles du PIB national réel annuel.

Tableau 1 : Niveau de détail à l'échelle nationale

Dépenses personnelles en biens et services de consommation	130
Biens durables	22
Biens semi-durables	15
Biens non durables	14
Services	79
Dépenses courantes des administrations en biens et services	24
Formations brute de capital fixe des administrations publiques	14
Investissement des administrations publiques en stocks	1
Formation brute de capital fixe des entreprises	18
Bâtiments résidentiels	4
Ouvrages non résidentiels et équipement	14
Ouvrages non résidentiels	4
Machines et matériel	10
Investissement des entreprises en stocks	110
Non agricoles	76
Agricoles	34
Exportations de biens et services	69
Biens	64
Services	5
Importations de biens et services	68
Biens	63
Services	5
Divergence statistique	1
Produit intérieur brut aux prix du marché	**435**
Demande intérieure finale	186

4.2 Le problème de l'investissement en stocks

Pour la plupart des postes du Tableau 3 de la publication et des autres tableaux présentés en termes réels, le calcul de Fisher ne pose pas vraiment de problèmes techniques. Il en va autrement des séries de l'investissement en stocks, qui sont des séries de premières différences. Comme ces séries fluctuent autour de zéro, il arrive que les indices Laspeyres et Paasche prennent des signes opposés; le Fisher étant une moyenne géométrique de ces deux indices, il devient indéterminé.

Les séries réelles de l'investissement en stocks publiées par la DCRD ne sont pas le résultat de calculs directs de l'indice Fisher en chaîne tels que présentés ci-dessus, mais plutôt une approximation. L'approche utilisée par la DCRD se base sur le fait qu'un investissement en stocks représente en fait la variation d'un stock total, qui lui est toujours positif. En principe, un indice Fisher peut donc être calculé sur les séries de stocks total. Une fois cet indice étalonné sur la valeur en dollars d'une période de référence, on peut supposer que les premières différences de cette série en dollars représentent une approximation de la série réelle de l'investissement en stocks.

Si une telle méthode est aisément applicable au seul calcul de l'investissement réel en stocks, elle est toutefois inutilisable comme tel dans cadre du calcul du PIB réel. En effet, le calcul du PIB réel doit se faire avec des séries d'investissement en stock, et non avec des séries de stock total. Pour contourner ce problème, la DCRD utilise deux séries de stocks total plutôt qu'une pour chaque série d'investissement en stocks : une première série, au signe positif, du stock total à la période courante, et seconde série, au signe négatif, du stock total à la période précédente. Cette dernière série est en fait une série de stock total déphasée d'une période. En tout temps *t*, la différence entre ces deux séries correspond à l'investissement en stock au cours de cette même période. En remplaçant dans le PIB chaque série d'investissement en stock par ces deux séries de stocks total, l'une positive et l'autre négative et déphasée, on peut alors calculer le PIB réel à l'aide de la formule de l'indice en chaîne Fisher. Les prix des séries de stocks total sont ceux de l'investissement en stocks.

Le calcul des séries réelles de l'investissement en stock fait appel aux mêmes séries de stock total. Pour chaque agrégat d'investissement en stocks, un indice en chaîne Fisher est obtenu des séries du stock total à la période courante et un autre des séries du stock total déphasé. Une fois étalonnées à la période de référence, ces séries Fisher de stock total peuvent être soustraites l'une de l'autre pour simuler une série réelle Fisher de l'investissement en stocks. C'est de cette façon que sont calculés les agrégats réels de l'investissement des entreprises en stocks publiés par la Division des comptes des revenus et dépenses.

Cette méthodologie de calcul de l'investissement en stocks explique le fait que, dans le Tableau 1, on voit 110 séries de stocks impliquées dans le calcul du Fisher, dont 76 non agricoles et 34 agricoles (alors qu'en fait, on compte 55 séries d'investissement en stocks publiées en dollars courants, dont 38 non agricoles et 17 agricoles).

4.3 Les comptes provinciaux

À l'échelle provinciale, les calculs des données réelles sont effectués de la même façon qu'au niveau national, à la différence près qu'ils sont faits sur une base annuelle. L'investissement en stock est calculé selon la méthode décrite ci-dessus, sur une base annuelle, avec des prix moyens pour l'année.

Le niveau de détail des comptes provinciaux diffère de celui des comptes nationaux trimestriels. Pour chaque province, 502 séries entrent dans le calcul du PIB réel. Le Tableau 2 ci-contre montre la répartition de ces séries à travers les postes du Tableau 3 de la publication *Comptes économiques provinciaux* (13-213). On notera que cette répartition diffère quelque peu de la structure nationale, en raison de la disponibilité et de la qualité différentes des données provinciales.

Tableau 2 : Niveau de détail à l'échelle provinciale

Dépenses personnelles en biens et services de consommation	130
Biens durables	22
Biens semi-durables	15
Biens non durables	14
Services	79
Dépenses courantes nettes des administrations en biens et services	24
Formations brute de capital fixe des administrations publiques	3
Structures	2
Machines et matériel	1
Investissement des administrations publiques en stocks	1
Formation brute de capital fixe des entreprises	5
Bâtiments résidentiels	3
Ouvrages non résidentiels	1
Machines et matériel	1
Investissement des entreprises en stocks	110
Non agricoles	76
Agricoles	34
Exportations de biens et services	114
Exportations aux autres pays	57
Exportations aux autres provinces	57
Importations de biens et services	114
Importations des autres pays	57
Importations des autres provinces	57
Divergence statistique	1
Produit intérieur brut aux prix du marché	**502**
Demande intérieure finale	162

Sources de biais entre les systèmes national et provincial

Les systèmes national et provincial sont additivement cohérents lors qu'exprimés en valeur nominale. En termes réels cependant, les propriétés de l'indice en chaîne de Fisher font en sorte que cette cohérence ne peut plus être assurée.

En premier lieu, les séries réelles basées sur un calcul de Fisher en chaîne sont non additives. Cela signifie d'abord que pour chaque province ainsi que pour le Canada, la somme des agrégats n'égalera pas l'agrégat principal (par exemple, la somme des aggrégats du tableau 3 de notre publication n'égale pas le PIB). Autre conséquence de cette non-additivité : pour chaque agrégat, la somme des provinces n'égalera pas le niveau national (par exemple, la somme des dépenses en biens de services de consommation de toutes les provinces n'égalera pas les dépenses nationales en biens de services de consommation).

Deuxièmement, les séries réelles sont calculées différemment au niveau national et provincial. Alors que les séries annuelles nationales représentent une moyenne des trimestres, les séries annuelles provinciales représentent un indice en chaîne de Fisher calculé sur l'année. Or, ces deux façons de calculer mènent à des résultats différents.

Troisièmement, il y a théoriquement deux façons de calculer les séries réelles au niveau national. Les indices Fisher peuvent être calculés avec les séries nationales (celles-ci étant la somme des séries provinciales), ou être calculés directement avec les séries provinciales. Comme le Fisher est un indice sensible au nombre de séries impliquées dans le calcul, les deux calculs n'aboutissent pas exactement au même résultat.

Enfin, le niveau de détail est différent entre le calcul national et le calcul provincial (respectivement 435 et 502 séries). Comme le Fisher est un indice sensible au nombre de séries impliquées dans le calcul, cela conduit à un biais inévitable entre les calculs national et provincial.

Pour ces raisons, il est peu probable que les séries provinciales du PIB en termes réels, soient additivement cohérentes aux séries nationales.

5.0 Le problème de la non-additivité

Les séries de Fisher en chaîne publiées par les Comptes des revenus et dépenses ne sont pas additives, et ce problème s'accroît à mesure que l'on s'éloigne de la période de référence. La non-additivité des séries réelles provient à la fois de l'enchaînement, qui a pour effet de détruire la cohérence additive des équations comptables, et de la formule de Fisher elle-même, qui n'est pas dotée de la propriété d'additivité contrairement à la formule de Laspeyres.

Le fait que les séries réelles des Comptes n'ont pas de cohérence additive rend leur manipulation plus complexe qu'elle ne l'était à l'époque où les calculs était basés sur un indice de Laspeyres. Par exemple, il devient difficile de mesurer la contribution d'un agrégat ou d'un secteur à un ensemble plus vaste, sachant que la somme des agrégats n'équivaut pas au total. Aussi, il devient téméraire de recréer des agrégats à partir de d'autres agrégats.

Il existe plusieurs pistes de solution pour parer à ces problèmes. Pour certaines analyses sommaires, les données en dollars courants peuvent être suffisantes et même souhaitables car elles reflètent la structure de l'économie aux prix actuels. Cela est particulièrement vrai si les agrégats étudiés n'affichent pas de grandes variations de prix ou si ces variations sont assez uniformes.

Pour qui veut s'en tenir aux données réelles et veut recréer des agrégations, une solution se trouve dans le calcul d'indices Fisher à partir des données Fisher existantes. Diewert (1978) a montré que le Fisher était approximativement cohérent, et qu'ainsi il était possible de calculer des indices Fisher à partir d'agrégats déjà en Fisher, ce qu'il a appelé un « Fisher de Fishers ». Cette solution donne une approximation valable en autant que les agrégats entrant dans le calcul soient relativement consistants au niveau des prix (ce calcul est à proscrire, par exemple, s'il implique des séries d'investissement en stocks).

Une solution plus « structurelle » consiste à jouer avec la fréquence de l'étalonnage. Comme l'additivité décroît à mesure que l'on s'éloigne de l'année de référence, réétalonner les séries de manière à rapprocher la période de référence peut aider à atténuer une partie du problème, sans toutefois rendre l'ensemble strictement additif. Il faut noter que dans le cas de données réelles basées sur des calculs d'indice en chaîne de Fisher, un changement de période de référence n'affecte aucunement les taux de croissance des séries réelles.

À défaut de pouvoir rendre additifs les niveaux, la DCRD propose, à l'instar du *Bureau of Economic Analysis* des États-Unis, une décomposition strictement additive des variations des agrégats pour les tableaux publiés des données réelles. La formule utilisée vise à repondérer les contributions des séries de manière à ce qu'elles deviennent strictement additives à la variation totale de l'agrégat :

$$(11) \qquad \Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{(p^i_{t-1} + {p^i_t}/{FP_t}) \times (q^i_t - q^i_{t-1})}{\sum_i (p^i_{t-1} + {p^i_t}/{FP_t}) \times q^i_{t-1}}$$

ou, dans une forme qui s'applique aux séries nominales et aux prix,

$$(11a)\ \Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{\left({\sum_i C_t}/{\sum_i C_{t-1}}\right) \times \left(C^i_t\left({p^i_{t-1}}/{p^i_t}\right) - C^i_{t-1}\right) + FV_t\left(C^i_t - C^i_{t-1}\left({p^i_t}/{p^i_{t-1}}\right)\right)}{\sum_i C_t + FV_t \sum_i C_{t-1}\left({p^i_t}/{p^i_{t-1}}\right)}$$

Cette formule est à l'origine des séries de contribution à la variation en pourcentage publiées par le Système des comptes nationaux. Une démonstration mathématique détaillée est disponible à l'Annexe II.

La contribution d'une série à la variation du PIB

La contribution d'un agrégat à la variation en pourcentage du PIB en termes réels est présentée dans le Tableau 4 de la publication trimestrielle (13-001). Des tableaux de contribution à la variation sont également comptabilisés pour divers grands agrégats (voir Tableaux 18, 21, 24 et 27 de la même publication).

Chacun de ces tableaux reprend la maquette du tableau des données réelles correspondantes. À la place des données réelles, on y trouve les contributions à la variation en pourcentage de l'agrégat de référence, mentionné dans le titre du tableau. Par exemple, le Tableau 4 de notre publication trimestrielle reprend la maquette du Tableau 3, et montre les contributions des agrégats du Tableau 3 à la variation en pourcentage du PIB réel. Ces contributions ne sont pas présentées en proportion, mais directement en points de pourcentage : par exemple, une contribution de l'agrégat des dépenses personnelles de consommation de 0,453 à une variation du PIB de 1,473% signifie que 0,453 points de pourcentage sur les 1,473 sont attribuables aux dépenses personnelles de consommation.

La formule de contribution à la variation en pourcentage exposée ci-dessus ne tient que pour une seule période. Pour utiliser la même formule sur une plus longue période de temps, il faut produire une valeur Fisher non chaînée, dont les bases de pondération correspondent aux périodes pour lesquelles on veut faire l'analyse. Par exemple, pour analyser la progression des biens de consommation durables entre le quatrième trimestre de 1996 et le quatrième trimestre de 2000, on peut calculer un indice Fisher dont la pondération est explicitement fonction des prix du quatrième trimestre de 1996 et du quatrième trimestre de 2000. Il s'agit, en quelque sorte, d'un indice Fisher à base fixe. Une fois cet indice calculé, la formule de contribution à la variation en pourcentage peut être directement utilisée.

De tels calculs pourront être effectués par les utilisateurs eux-mêmes, dans la mesure où ils auront à leur disposition toutes les séries comprises dans l'agrégat. Dans le cas contraire, ils peuvent être effectués sur demande par Statistique Canada.

Annexe I

Transformation des indices de Laspeyres et Paasche

L'indice de volume de Laspeyres

L'indice le plus connu est l'indice de volume de Laspeyres, où les prix d'une année de base préalablement choisie servent de pondération.

(1) $$LQ_{t/o} = \frac{\sum p_o q_t}{\sum p_o q_o}$$

ou, dans une version pouvant être chaînée:

(2) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$$

où: LQ est l'indice de quantité de Laspeyres à la période t par rapport à la période o
p représente les séries des prix
q représente les séries des quantités

En utilisant la relation $C = pq$ *(la valeur égale le prix multiplié par la quantité)*, l'équation (2) peut être représentée sous une forme plus fonctionnelle :

(3) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_{t-1}\left(\frac{p_t}{p_t}\right) q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \quad \Rightarrow$$

(4) $$LQ_{t/t-1} = \frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) p_t q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$$

et:

(5) $$LV_{t/t-1} = \frac{\sum \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) C_t}{\sum C_{t-1}}$$

L'indice de volume de Paasche

Plutôt que de se référer à une période antérieure, un indice de volume peut être basé sur les prix de la période courante. Il s'agit alors d'un indice de type Paasche:

(6) $$PQ_{t/o} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_o}$$

ou, dans une version pouvant être chaînée:

(7) $$PQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t-1}}$$

En opérant une substitution identique à celle effectuée sur l'indice de Laspeyres, on obtient:

(8) $$PQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t \left(\frac{p_{t-1}}{p_{t-1}}\right) q_{t-1}} \quad \Rightarrow$$

(9) $$PQ_{t/t-1} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) p_{t-1} q_{t-1}}$$

et:

(10) $$PV_{t/t-1} = \frac{\sum C_t}{\sum \left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) C_{t-1}}$$

Annexe II

Formule de contribution à la variation en pourcentage

L'approche axiomatique suggérée par Yuri Dikhanov (1997) et Christian Ehemann (1997) du *Bureau of Economic Analysis* se fonde sur le fait qu'un indice de volume de Fisher est une moyenne d'un indice de Laspeyres, qui évalue la variation d'une quantité d'une composante *i* au prix p_0, et d'un indice de Paasche, qui évalue la variation de volume de la même composante au prix p_1. Une décomposition additive d'un indice de Fisher qui utiliserait une moyenne pondérée des prix p_0 et p_1 pour évaluer la variation de volume de la composante *i* est donc justifiée. De manière générale, une telle décomposition peut prendre la forme suivante:

$$G(t) = \frac{\sum_i (p_{t-1}^i + \lambda p_t^i) \times q_t^i}{\sum_i (p_{t-1}^i + \lambda p_t^i) \times q_{t-1}^i}$$

où $G(t)$ représente un indice quelconque. La solution pour λ se déduit de la façon suivante:

(1.a) $$G(t) = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i + \lambda \sum_i p_t^i q_t^i}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + \lambda \sum_i p_t^i q_{t-1}^i}$$

(1.b) $$\Rightarrow \quad G(t)\left(\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + \lambda \sum_i p_t^i q_{t-1}^i\right) = \sum_i p_{t-1}^i q_t^i + \lambda \sum_i p_t^i q_t^i$$

(1.c) $$\Rightarrow \quad G(t)\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i + \lambda G(t)\sum_i p_t^i q_{t-1}^i = \sum_i p_{t-1}^i q_t^i + \lambda \sum_i p_t^i q_t^i$$

(1.d) $$\Rightarrow \quad \lambda G(t)\sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \lambda \sum_i p_t^i q_t^i = \sum_i p_{t-1}^i q_t^i - G(t)\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i$$

donc:

(2) $$\lambda = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i - G(t)\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{G(t)\sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \sum_i p_t^i q_t^i}$$

Dans le cas où $G(t)$ serait donné par un indice de Laspeyres, on aurait:

(2.a) $$\lambda = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i - \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{\frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}\sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \sum_i p_t^i q_t^i}$$

ce qui conduit immédiatement à $\lambda = 0$.

Ainsi, pour le cas d'un indice de Laspeyres, la contribution $\%\Delta_{i,t-1/t}$ est donnée par (en retranchant 1 et en multipliant par 100 l'équation (1)):

(3) $$\%\Delta_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{p_{t-1}^i (q_t^i - q_{t-1}^i)}{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}$$

ce qui nous ramène à l'équation (3) du texte. Ce résultat est compréhensible vu la consistance additive de l'indice de Laspeyres.

Dans le cas où *G(t)* est donné par un indice de Fisher, on a:

(2.b) $$\lambda = \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i - FV_t \sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{FV_t \sum_i p_t^i q_{t-1}^i - \sum_i p_t^i q_t^i}$$

où FV_t est l'indice de volume de Fisher au temps *t*. En divisant le numérateur et le dénominateur par $\Sigma p_t q_t$, on obtient:

(2.c) $$\lambda = \frac{\frac{\sum_i p_{t-1}^i q_t^i}{\sum_i p_t^i q_t^i} - FV_t \frac{\sum_i p_{t-1}^i q_{t-1}^i}{\sum_i p_t^i q_t^i}}{FV_t \frac{\sum_i p_t^i q_{t-1}^i}{\sum_i p_t^i q_t^i} - 1}$$

ou:

(2.c') $$\lambda = \frac{\frac{1}{PP_t} - \frac{FV_t}{FV_t FP_t}}{\frac{FV_t}{PV_t} - 1}$$

où PP_t est l'indice de prix de Paasche au temps *t*, et FP_t est l'indice de prix de Fisher au temps *t*. Si on multiplie (2.c') par FP_t au numérateur et au dénominateur, on obtient:

(2.d) $$\lambda = \frac{\frac{FP_t}{PP_t} - 1}{LP_t - FP_t}$$

qui, multiplié par PP_t au numérateur et au dénominateur, devient:

(2.e) $$\lambda = \frac{\frac{PP_t FP_t}{PP_t} - PP_t}{PP_t LP_t - PP_t FP_t}$$

en réduisant et utilisant l'équivalence $PP_t LP_t = FP_t^2$, on obtient:

(2.f) $$\lambda = \frac{FP_t - PP_t}{FP_t(FP_t - PP_t)} = \frac{1}{FP_t}$$

L'équation (1) devient alors:

$$FV_t = \frac{\sum_i (p^i_{t-1} + p^i_t / FP_t) \times q^i_t}{\sum_i (p^i_{t-1} + p^i_t / FP_t) \times q^i_{t-1}} \tag{4}$$

Pour obtenir la contribution d'une seule composante à la croissance en pourcentage de l'agrégat, on pose FV_t-*1* et on multiplie par 100:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{(p^i_{t-1} + p^i_t / FP_t) \times (q^i_t - q^i_{t-1})}{\sum_i (p^i_{t-1} + p^i_t / FP_t) \times q^i_{t-1}} \tag{4.a}$$

Cette équation est parfois difficile à opérationnaliser, étant donné qu'elle est exprimée en termes de prix et quantités. Pour une version exprimée en termes de valeurs en dollars courants et de prix (telle qu'utilisée par la DCRD), on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par FV_tFP_t:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{FV_t FP_t (p^i_{t-1} q^i_t + p^i_t q^i_t / FP_t - p^i_{t-1} q^i_{t-1} - p^i_t q^i_{t-1} / FP_t)}{FV_t FP_t \sum_i p^i_{t-1} q^i_{t-1} + FV_t FP_t \sum_i p^i_t q^i_{t-1} / FP_t} \tag{4.b}$$

ou:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{\left(\sum_i C_t / \sum_i C_{t-1}\right) p^i_{t-1} q^i_t + FV_t C^i_t - \left(\sum_i C_t / \sum_i C_{t-1}\right) C^i_{t-1} - FV_t p^i_t q^i_{t-1}}{\sum_i C_t + FV_t \sum_i p^i_t q^i_{t-1}} \tag{4.c}$$

en regroupant les sommes des valeurs en dollars courants:

$$\Delta\%_{i,t-1/t} = 100 \times \frac{\left(\sum_i C_t / \sum_i C_{t-1}\right) \times \left(C^i_t \left(p^i_{t-1} / p^i_t\right) - C^i_{t-1}\right) + FV_t \left(C^i_t - C^i_{t-1} \left(p^i_t / p^i_{t-1}\right)\right)}{\sum_i C_t + FV_t \sum_i C_{t-1} \left(p^i_t / p^i_{t-1}\right)} \tag{5}$$

Bibliographie

Berthier, J.P. (2002), **Réflexions sur les différentes notions de volume dans les comptes nationaux,** Direction des études et synthèses économique, Institut national de la statistique et des études économiques.

Bureau of Economic Analysis (1998), **Updated Summary NIPA Methodologies**, Survey of Current Business.

Bureau of Economic Analysis (1998), **National Income and Product Accounts 1929-94 - vol.1, definitions and classifications.**

Diewert, W.E. (1978), **Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation,** Econometrica, Vol. 46 no. 4.

Diewert, W.E. (1995), **Price and Volume Measures in the System of National Accounts**, Discussion paper no. 95-02, Department of Economics, University of British Columbia.

Eurostat (2001), **Handbook on price and volume measures in national accounts,** Methods and Nomenclatures.

Groupe de travail intersecrétariats sur la comptabilité nationale (1993), **Système de comptabilité nationale 1993,** avec la participation de : Commission des Communauté européennes, Fonds monétaire international, Organisation de coopération et de developpement économiques, Nations Unies, Banque mondiale.

Jackson, C. (1996), **L'effet du changement d'année de base sur le PIB**, Série technique no. 35, Statistique Canada, Division des Comptes des revenus et dépenses.

Kemp, K. et Smith, P. (1988), **Les indices de prix Paasche, Laspeyres et en chaîne dans les Comptes des revenus et dépenses,** Série technique no. 1, Statistique Canada, Division des Comptes des revenus et dépenses.

Landefeld, J.S. et Parker, R.P. (1997), **BEA's Chain Indexes, Time Series, and Measures of Long-Term Economic Growth**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Landefeld, J.S. et Parker, R.P. (1995), **Preview of the Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts: - BEA's New Featured Measures of Output and Prices,** Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Marshall, B.R., Diewert, W.E. et Ehemann, C. (2000), **Additive Decompositions for Fisher, Törnqvist and Geometric Mean Indexes,** Discussion Paper no. 01-01, Department of Economics, University of British Columbi.

McLennan, W. (1998), **Introduction of Chain Volume Measures in the Australian National Accounts,** Information paper 5248.0, Australian Bureau of Statistics.

Moulton, B.R., Parker, R.P. et Seskin, E.P. (1999), **A Preview of the 1999 Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts - Definitional and Classificational Changes**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Moulton, B. R. et Seskin, E.P. (1999), **A Preview of the 1999 Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts - Statistical Changes**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Moulton, B.R. et Sullivan, D.F. (1999), **A Preview of the 1999 Comprehensive Revision of the National Income and Product Accounts - New and Redesigned Tables**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Rossiter, R.D. (2000), **Fisher Ideal Indexes in the National Income and Products Accounts,** Journal of Economic Education, Fall 2000.

Saulnier, M. (1990), **Produit intérieur brut en termes réels: sensibilité au choix de l'année de base**, Série technique no. 6, Statistique Canada, Division des Comptes des revenus et dépenses.

Seskin, E.P. (1999), **Improved Estimates of the National Income and Product Accounts for 1959-98 - Results of the Comprehensive Revision**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Triplett, J.E. (1992), **Economic Theory and BEA's Alternative Quantity and Price Indexes**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Varvares, C., Prakken, J. et Guirl, L. (1997), **Macro Modeling with Chain-type GDP,** Macroeconomic Advisers, LLC.

Whelan, K. (2002), **A Guide to U.S. Chained Aggregated NIPA Data,** Review of Income and Wealth, Series 48, no. 2.

Wilson, K. (1991), **L'introduction des indices de volume en chaîne dans les Comptes des revenus et dépenses,** Série technique no. 14, Statistique Canada, Division des Comptes des revenus et dépenses.

Young, A.H. (1993), **Alternate Measures of Change in Real Output and Prices, Quarterly Estimates for 1959-92**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Young, A.H. (1992), **Alternate Measures of Change in Real Output and Prices**, Survey of Current Business, Bureau of Economic Analysis.

Documents de la réunion annuelle du comité d'experts en comptabilité nationale de l'OCDE :

Septembre 2000, **U.S. National Income and Products Accounts: Annual and quarterly chain measures of quantity and prices**, Bureau of Economic Analysis, U.S. Department of Commerce.

Septembre 2000, **The Chain Index for GDP Volume Measures: the Italian Experience**, ISTAT – ITALY.

Septembre 2000, **Consistent Aggregation and Chaining of Price and Quantity Measures,** University of Munich, Germany.

Septembre 2000, **Chain Volumes Based on the Hillinger Aggregation Method**, National Accounts - OECD, France.

Septembre 2000, **How the Chain-Additivity Issue is Treated in the U.S. Economic Accounts,** Bureau of Economic Analysis, U.S. Department of Commerce.

Septembre 1998, **Quarterly Chain Series**, Statistics Netherlands.

Septembre 1998, **Introduction of chain volume measures - the Australian experience**, Australian Bureau of Statistics.

Série technique

La Division des comptes des revenus et dispenses (DCRD) offre des tirés à part d'articles techniques, que l'utilisateur peut obtenir sans frais. Voici la liste des tirés à part disponibles. Pour obtenir des copies, vous pouvez communiquer avec la responsable des services aux clients au 613-951-3810 ou vous pouvez écrire à DCRD, Statistique Canada, 21^{e} étage, édifice R.H. Coats, Tunney's Pasture, Ottawa, Ontario, K1A OT6. (Internet: iead-into-dcrd@statcan.ca)

1. «Les indices de prix Laspeyres, Paasche et en chaîne dans les comptes des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, quatrième trimestre 1988.
2. «Document technique sur le traitement de la production de céréales dans les comptes trimestriels des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1989.
3. «Révision des données de la période 1985-1988 dans les comptes nationaux des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1989.
4. «Incorporation dans les comptes des revenus et dépenses d'une décomposition de (investissement en machines et matériel», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1989.
5. «Les nouvelles estimations provinciales de la demande intérieure finale en prix constants», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, quatrième trimestre 1989.
6. «Produit intérieur brut en termes réels. sensibilité au choix de l'année de base», tiré à part de ***L'Observateur économique canadien***, mai 1990.
7. «Révisions des données de la période 1986-1969 dans les comptes nationaux des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1990.
8. «Les indices de volume dans les comptes des revenus et dépenses», tiré a pan de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1990.
9. «Un nouvel indicateur des tendances de l'inflation par les salaires», tiré a pan de ***L'Observateur économique canadien***, septembre 1989.
10. «Tendances récentes des salaires», tiré à part de ***L'Emploi et le revenu en perspective***, hiver 1990.
11. «Le système de comptabilité nationale du Canada et le système de comptabilité nationale des Nations Unies», tiré à part de ***comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1990.
12. «La répartition des impôts indirects et des subventions aux composantes de la dépense finale», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1990.
13. «Le traitement de la TPS dans les comptes des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1991.
14. «L'introduction des indices de volume en chaîne dans les comptes des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1991.
15. «Révisions des données de la période 1987-1990 dans les comptes nationaux des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, deuxième trimestre 1991.
16. «Estimations en volume du commerce international des services commerciaux», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1991.
17. «Le défi de la mesure dans les comptes nationaux», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, quatrième trimestre 1991.
18. «Étude sur le flux des services de consommation générés par le stock de biens de consommation», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, quatrième trimestre 1991.
19. «La valeur du travail ménager au Canada. 1986», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1992.
20. «Révisions des données de la période 1988-1991 dans les comptes nationaux des revenus et dépenses», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, estimations annuelles. 1980-1991.
21. «Achats outre-frontière - Tendances et mesure», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1992.
22. «Comment lire» les statistiques produites par le gouvernement: un guide pratique», tiré à part de ***Options Politiques***, vol. 14, n˚ 3, avril 1993.

23. «L'Actualité des comptes des revenus et dépenses trimestriels: une comparaison à l'échelle internationale», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1993.

24. «Comptes nationaux des revenus et dépenses: Estimations révisées pour la période de 1989 à 1992», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, estimations annuelles, 1981-1992.

25. «Comparaisons internationales des quantités et des prix: parités de pouvoir d'achat et dépenses réelles, Canada et États-Unis», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, estimations annuelles, 1981-1992.

26. «La ventilation par secteur du PIB au coût des facteurs», tiré à part de ***comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1993

27. «La valeur du travail ménager au Canada, 1992», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, quatrième trimestre 1993.

28. «Évaluation de la dimension de l'économie souterraine: le point de vue de Statistique Canada», tiré à part de ***L'Observateur économique canadien***, mai 1994.

29. «Comptes nationaux des revenus et dépenses: Estimations révisées pour la période de 1990 à 1993», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, premier trimestre 1994.

30. «Rapport d'étape: élément environnemental des comptes nationaux du Canada», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, estimations annuelles, 1982-1993.

31. «Le Compte satellite du tourisme», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, deuxième trimestre 1994.

32. «Le système international de comptabilité nationale de 1993: son application au Canada», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***. troisième trimestre 1994.

33. «La révision de 1995 des Comptes économiques et financiers nationaux», tiré à part de ***Comptes économiques et financiers nationaux***, premier trimestre 1995.

34. «Une introduction aux produits financiers dérivés», tiré à part de ***Comptes économiques et financiers nationaux***, premier trimestre 1995.

35. «L'effet du changement d'année de base sur le PIB», tiré à part de ***Comptes économiques et financiers nationaux***, deuxième trimestre 1996.

36. «Parités de pouvoir d'achat et dépenses réelles, États-Unis et Canada: mise à jour jusqu'à 1998», tiré à part de ***Comptes nationaux des revenus et dépenses***, troisième trimestre 1999.

37. «Capitalisation des logiciels dans la comptabilité nationale», ***Comptes économiques et financiers nationaux***, Février 2002.

38. «Compte satellite provincial et territorial du tourisme pour le Canada, 1996», ***Comptes économiques et financiers nationaux***, Avril 2002.

39. «Parités de pouvoir d'achat et dépenses réelles, États-Unis et Canada», ***Comptes économiques et financiers nationaux,*** Juin 2002.

40. «Compte satellite provincial et territorial du tourisme pour le Canada, 1998», ***Comptes économiques et financiers nationaux***, Juin 2003.

41. «Recettes des administrations publiques attribuables au tourisme», ***Comptes économiques et financiers nationaux***, Septembre 2003.

42. «Méthodologie de l'indice de volume en chaîne Fisher», ***Comptes économiques et financiers nationaux***, Novembre 2003.